BIBLIOGRAPHIC RECORD TARGET

Graduate Library
University of Michigan

Preservation Office

Storage Number: ______________________

ABR2978
UL FMT B RT a BL m T/C DT 07/18/88 R/DT 10/07/92 CC STAT mm E/L 1
010: : |a 04027398
035/1: : |a (RLIN)MIUG86-B51700
035/2: : |a (CaOTULAS)160124306
040: : |c MiU
050/1:0 : |a QA825 |b .H69
100:1 : |a Hölder, Otto, |d 1859-
245:00: |a Bieträge zur potentialtheorie ...
260: : |a Stuttgart, |b J. B. Metz.ersche buchdr., |c 1882.
300/1: : |a iv, 71 p. |c 22 cm.
502/1: : |a Inaug-diss.--Tübingen.
650/1: 0: |a Potential theory (Mathematics)
998: : |c WFA |s 9124

Beiträge zur Potentialtheorie.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

der

naturwissenschaftlichen Facultät

zu Tübingen

vorgelegt von

Otto Hölder

aus Stuttgart.



Stuttgart.

Druck der J. B. Metzlerschen Buchdruckerei.

1882.

Inhalt.

Die Potentialtheorie nimmt eine so wichtige Stelle ein auch in der reinen Mathematik, dass eine auf den Grundlagen der neueren Functionenlehre ruhende Neubearbeitung dieser Theorie nicht überflüssig sein dürfte. Viele der Beweise für die fundamentalen Potentialsätze lassen noch an Strenge zu wünschen übrig; namentlich findet man nur selten die Giltigkeitsbedingungen genau angegeben. So z. B. sagt man in der Regel, dass die verallgemeinerte Laplace'sche Gleichung $\frac{d^2 V}{d x^2} + \frac{d^2 V}{d y^2} + \frac{d^2 V}{d z^2} = -4 \pi \varkappa$ stets giltig sei unter der Voraussetzung der Stetigkeit der Dichte $\varkappa$. Allein in allen Beweisen, welche bisher für diesen Satz gegeben worden sind, wird von der Differenzirbarkeit von $\varkappa$ Gebrauch gemacht. Bei Dirichlet*) ist diese Voraussetzung auch ausdrücklich hervorgehoben; damit ist aber auch eine grössere Beschränkung eingeführt als nöthig.

Solche Gründe dürften den Versuch rechtfertigen, die Beweise für die elementaren Potentialsätze theilweise durch neue zu ersetzen. In der vorliegenden Arbeit, in welcher dieser Versuch gemacht ist, wird man natürlich nicht erwarten, die nothwendigen Bedingungen für die Giltigkeit dieser Sätze aufgestellt zu finden.

---

*) Vorlesungen über die im umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung wirkenden Kräfte von P. G. Lejeune-Dirichlet. Herausgegeben von Grube.

Man wird sich damit begnügen müssen, nach Möglichkeit allgemeine Bedingungen aufzustellen, die einen exacten Beweis zu führen erlauben.

Beim Flächenpotential im zweiten Abschnitt dürfte die hier durchgeführte Untersuchung über das Verhalten der Ableitungen am Rand der mit Masse belegten Fläche auch in den Resultaten neu sein.

Erster Abschnitt.

Das Raumpotential.

1.

Die Bedingungen der Integrirbarkeit.

Der *Integralbegriff*, den wir hier zu Grund legen, ist der gewöhnliche. f bedeute eine Function des Orts. Wir zerlegen das ganze dreidimensionale Integrationsgebiet in kleinere Theilgebiete, multipliciren den Inhalt jedes Theilgebiets mit einem Werth von f im Innern oder auf der Grenze desselben und summiren alle diese Producte. Die letztere Summe soll einem festen Werth dadurch beliebig nahe gebracht werden können, dass man die Ausdehnung der Theilgebiete nach allen Richtungen kleiner nimmt als eine hinreichend klein gewählte Grösse. Hierin liegt schon die Existenz einer festen Grenze, unter welcher f überall bleibt.

Um von dem, was unter einem solchen *Gebiet* verstanden werden soll, einen genauen Begriff zu haben, kann man von folgenden Definitionen Gebrauch machen:

Es seien im Raum Punkte in unendlicher Anzahl definirt, ganz im Endlichen liegend, welche mit dem gemeinsamen Buchstaben C bezeichnet werden sollen. Um jeden Punkt C lasse sich eine Kugel beschreiben, deren sämmtliche inneren Punkte gleichfalls zu den C gehören. Je zwei Punkte C sollen endlich durch einen aus Geradenstücken bestehenden Linienzug in der Weise verbunden werden können, dass jeder Punkt auf dem Linienzug ein Punkt C ist. Wir sagen in diesem Fall, dass die

Punkte C ein *Continuum* bilden. Diejenigen nicht zu den C gehörigen Punkte, in deren unendlicher Nähe es Punkte C gibt, bilden die *Grenze* des Continuums. Jeder andere Punkt des Raums ist ein *äusserer* Punkt.*) Unter den Punkten des Continuums verstehen wir hier also nur die *inneren* Punkte mit Ausschluss der Grenzpunkte.

Die Punkte der Grenze bezeichne man mit G. Auf jeder durch einen Punkt C gezogenen Geraden liegen mindestens zwei Punkte G.

Um nun einen Inhalt des Continuums definiren zu können, ist vorauszusetzen, dass man mit Hilfe von Ebenen einen Theil des Raums abgrenzen könne, welcher alle G enthält, und dessen Inhalt — im gewöhnlichen geometrischen Sinn — von beliebig verlangter Kleinheit ist. Herr P. du Bois-Reymond**) gebraucht im analogen Fall für ein Punktsystem auf einer Geraden den Ausdruck *integrirbares Punktsystem*. Nun ist leicht zu sehen, wie ein Inhalt des Continuums zu definiren ist, wenn die G ein integrirbares Punktsystem bilden; man theilt in rechtwinklige Parallelepipeda, oder in beliebige polyedrische Theilgebiete; man erhält an der Grenze stets denselben Werth für den Inhalt.

Wenn wir also den ganzen Integrationsbereich I in die Gebiete C, C', C'' . . . theilen, so denken wir uns dabei, dass von den Punktsystemen I, C, C', C'' . . . jedes für sich ein solches Continuum bildet, dessen Grenzpunkte integrirbar sind. Jeder Punkt C soll von jedem C' u. s. f. verschieden sein; jeder Punkt C, C', C'' . . . gehört zu den I, und jedes I ist ein C, oder C', oder C'' . . ., oder ein Grenzpunkt eines der letzteren Punktsysteme.

Denkt man sich f in jedem Punkt gegeben, ausserhalb eines gewissen endlichen Gebiets überall null, so braucht über das Integrationsgebiet keinerlei Bestimmung getroffen zu werden.

Man kann auch eine Theilung des Gebiets durch drei zu einander senkrechte Parallelsysteme von Ebenen einführen, wobei

---

*) Diese Definitionen habe ich in den Vorlesungen des Herrn Weierstrass kennen gelernt.

**) Vergl. dessen Allg. Functionentheorie, pag. 189.

nur die Abstände beliebig sein sollen, die Richtungen fest. Nun lässt sich strenge beweisen:

Eine Function f, die bei dieser besonderen Art von Theilung ein Integral gibt, ist auch in der zuerst angegebenen Weise bei Verwendung beliebig gestalteter Theilgebiete integrirbar.

Es braucht also nur bei dieser besonderen Art von Theilung die verallgemeinerte Riemann'sche Bedingung erfüllt zu sein.

2.

Definition des Potentials; Stetigkeit; Verhalten im äusseren Raum.

In der Definitionsgleichung des Potentials

$$\int \frac{\varkappa \, d\tau}{r} = V(x, y, z)$$

ist
$$r = \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2},$$
$d\tau$ bedeutet das Raumelement, $\varkappa$ bedeutet eine nach der obigen Definition integrirbare Function der a, b, c. Die Integration ist über den Bereich der a, b, c auszudehnen.

Jeder Punkt, um welchen herum ein Bereich abgegrenzt werden kann, so dass in jedem Punkt des Bereichs $\varkappa = o$ ist, heisse *ausserhalb der Massen* liegend. Es mag erlaubt sein, von allen anderen Punkten zu sagen, sie liegen *innerhalb der Massen*, indem hier eine Grenze nicht unterschieden zu werden braucht.

Wenn x, y, z innerhalb der Massen liegt, so ist das Integral ein *uneigentliches*, in Wirklichkeit der Grenzwerth eines Integrals über ein den Punkt nicht enthaltendes Gebiet.

Es ist nun bekannt, wie die Stetigkeit des Potentials bewiesen wird; man braucht bloss vorher eine kleine Kugel um den zu untersuchenden Punkt abzugrenzen.

Wenn wir sagen: $f(x, y, z)$ ist im Punkt x_1, y_1, z_1 *als Function von x, y, z stetig*, so heisst diess, dass $[f(x, y, z) - f(x_1, y_1, z_1)]$ *) unter einer beliebig klein gewählten Grösse bleibt, wenn ein genügend kleiner Werth als obere Grenze für die Differenzen $[x - x_1]$,

---

*) $[a]$ bedeutet den absoluten Werth von a.

$[y - y_1]$, $[z - z_1]$ bestimmt wird. Eine für jeden Werth von x stetige Function von y, z braucht nicht überall als Function von x, y, z stetig zu sein. Eine in jedem Punkt eines räumlichen Continuums und seiner Grenze stetige Function von x, y, z ist in dem genannten Gebiete gleichmässig stetig. *)

Das Potential ist eine in jedem Punkt des Raums stetige Function von x, y, z.

In jedem ausserhalb der Massen liegenden Punkt x, y, z lässt sich $V(x+u,\ y+v,\ z+w)$ für hinreichend kleine u, v, w nach Potenzen der letzteren Grössen entwickeln. Hiedurch ist also das Potential im äusseren Raum als *analytische* Function charakterisirt. **)

3.

Die ersten Ableitungen des Potentials.

Unter den gemachten Voraussetzungen besitzt das Potential in jedem Punkt Ableitungen erster Ordnung; diese sind ausgedrückt durch:

$$\frac{dV}{dx} = \int \frac{\varkappa(a-x)}{r^3}\, d\tau,$$

$$\frac{dV}{dy} = \int \frac{\varkappa(b-y)}{r^3}\, d\tau,$$

$$\frac{dV}{dz} = \int \frac{\varkappa(c-z)}{r^3}\, d\tau,$$

und sind durchweg stetige Functionen von x, y, z. ***)

---

*) Auf diese verschiedenen Arten von Stetigkeit bei Functionen mehrerer Veränderlichen hat Herr Heine aufmerksam gemacht, z. B. in seiner Abhandlung über trig. Reihen im Borchardt'schen Journal, Bd. 71, p. 361, wo auch der Begriff der gleichmässigen Stetigkeit für Functionen von mehreren Veränderlichen aufgestellt ist. Der genannte Satz ist für eine Veränderliche von Herrn Heine (Borchardt, Bd. 74, p. 188), für mehrere Veränderliche von Herrn Lüroth (Math. Annalen Bd. 6, p. 319) bewiesen worden.

**) Hieran schliesst sich der Beweis des Satzes von Gauss von der Constanz des Potentials im äusseren Raum, wenn es in einem beliebig kleinen Theil desselben constant ist. Vergl. „C. Neumann, Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential", §. 2 und §. 15.

***) Diese Formeln sind weder bei Gauss (Werke Bd. V, p. 197: Allgemeine Lehrsätze u. s. f.) noch bei Dirichlet und Riemann (Vorlesungen über Schwere, Elektricität und Magnetismus, herausgegeben von Hattendorf)

Beweis:

Wir betrachten im Folgenden x, y, z als fest.

Es ist

$$\frac{V(x+\varDelta x, y, z) - V(x, y, z)}{\varDelta x} = \int \frac{\varkappa}{\varDelta x}\left(\frac{1}{\overline{r}} - \frac{1}{r}\right) d\tau,$$

wo

$$\overline{r} = \sqrt{(a-x-\varDelta x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}$$
$$= \sqrt{r^2 - 2\varDelta x(a-x) + \varDelta x^2},$$

und

$$r = \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}.$$

Nun ist:

$$\frac{1}{\varDelta x}\left(\frac{1}{\overline{r}} - \frac{1}{r}\right) = \frac{r^2 - \overline{r}^2}{\varDelta x \,.\, r \,.\, \overline{r}\,(r + \overline{r})}$$
$$= \frac{2(a-x) - \varDelta x}{r \,.\, \overline{r}\,(r + \overline{r})}.$$

Man hat die Ungleichungen:

$$[a-x] \leqq r,$$
$$[a-x-\varDelta x] \leqq \overline{r},$$
$$[\varDelta x] \leqq r + \overline{r};$$

die letzte derselben ergibt sich aus der Erwägung, dass $[\varDelta x]$, r und $\overline{r}$ die Längen der Seiten eines Dreiecks sind. Man bekommt so:

$$\left[\frac{1}{\varDelta x}\left(\frac{1}{\overline{r}} - \frac{1}{r}\right)\right] \leqq \frac{2}{\overline{r}\,(r + \overline{r})} + \frac{1}{r\overline{r}};$$

diess ist $\left\{\begin{array}{l} < \frac{2}{r^2} \\ \leqq \frac{2}{\overline{r}^2} \end{array}\right\}$, wenn $r \left\{\begin{array}{l} < \overline{r} \\ \geqq \overline{r} \end{array}\right\}$; also ist jedenfalls:

$$\left[\frac{1}{\varDelta x}\left(\frac{1}{\overline{r}} - \frac{1}{r}\right)\right] < 2\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\overline{r}^2}\right).$$

---

wirklich bewiesen; denn damit, dass die Formeln nicht illusorisch werden, steht ihre Giltigkeit noch nicht fest. Clausius gibt in seinem Lehrbuch (Potentialfunction und Potential) einen Beweis; darin kommt aber eine Differentiation unter dem Integralzeichen vor, welche strenge genommen nicht zugelassen werden darf. Ein von Bouquet herrührender Beweis findet sich z. B. in Briot's mechanischer Wärmetheorie. Von dem letzteren ist der hier gegebene im Princip freilich nicht verschieden, doch dürfte die Vermeidung einer Verwandlung der Integrationsvariabeln erwünscht sein.

Wählen wir nun eine beliebig kleine Grösse δ, so kann man, wie aus dem eben Entwickelten folgt, um den Punkt x, y, z eine Kugel so abgrenzen, dass der Beitrag der Massen in dieser Kugel zu dem Integral $\int \frac{\varkappa}{\varDelta x}\left(\frac{1}{\bar{r}} - \frac{1}{r}\right) d\tau$ kleiner als δ ist, wie nun auch $\varDelta x$ beschaffen sein möge.

Hält man hernach diese Kugel fest, so kann die Veränderlichkeit von $\varDelta x$ auf einen so kleinen Bereich beschränkt werden, dass ausserhalb der abgegrenzten Kugel überall die Differenz $\left[\frac{\varkappa}{\varDelta x}\left(\frac{1}{\bar{r}} - \frac{1}{r}\right) - \frac{\varkappa(a-x)}{r^3}\right]$ unter einer beliebig klein vorgeschriebenen Grenze bleibt. Die absolute Convergenz des uneigentlichen Integrals $\int \frac{\varkappa(a-x)}{r^3} d\tau$ steht ohnediess fest; und man folgert so leicht:

$$\lim_{\varDelta x = 0} \frac{V(x + \varDelta x, y, z) - V(x, y, z)}{\varDelta x} = \int \frac{\varkappa(a-x)}{r^3} d\tau.$$

Ebenso die analogen Gleichungen.

Dass diese Differentialquotienten stetige Functionen von x, y, z sind, ergibt sich auf die bekannte Weise, wie beim Potential selbst.

Man folgert hieraus, dass:

$$V(x + u,\ y + v,\ z + w) - V(x, y, z)$$
$$= u\, V_1(x, y, z) + v.\ \ V_2(x, y, z) + w.\ \ V_3(x, y, z) + \varrho\, \delta,$$

wo $\varrho = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$, *und* δ *bei festgehaltenem* x, y, z *mit* ϱ *unendlich klein wird, wie auch sonst die* u, v, w *beschaffen sein mögen.* *)

Die letzte Gleichung liefert die bekannte Relation:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} \cos(t, x) + \frac{dV}{dy} \cos(t, y) + \frac{dV}{dz} \cos(t, z),$$

wo t eine beliebige feste Richtung bedeutet.

---

*) S. im Anhang: Ueber das totale Differential. Uebrigens ist diese Gleichung auch leicht zu erweisen durch Entwicklung der ganzen Differenz.

4.

Die zweiten Ableitungen im Innern der Massen und die verallgemeinerte Laplace'sche Gleichung.

Es wurde oben angeführt, dass die bis jetzt für die Gleichung $\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} = -4\pi\varkappa$ gegebenen Beweise die Differenzirbarkeit von $\varkappa$ voraussetzen.

Diess springt sofort in die Augen bei Gauss*) und Dirichlet**), wo die Beweise auf einer Integralverwandlung beruhen in der Weise, dass die Grössen $\frac{d\varkappa}{da}, \frac{d\varkappa}{db}, \frac{d\varkappa}{dc}$ in den neuen Integralen unter dem Zeichen auftreten. Dasselbe gilt von der Riemann'schen***) Beweisführung. Die Existenz der zweiten Differentialquotienten wird durch dieselbe Umformung gezeigt, die sich bei Dirichlet und bei Gauss findet; der Unterschied ist nur der, dass der Werth von $\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2}$ — auf Grund der Existenz und Integrirbarkeit dieser Grössen — aus den Green'schen Sätzen geschöpft wird.

Etwas versteckter ist die genannte Voraussetzung in dem Clausius'schen †) Beweis enthalten. Dass sie in der That darin enthalten ist, geht aus Folgendem hervor: Es wird bei Clausius eine Grösse $\int_0^R \varkappa\, d\varrho = H$ eingeführt; und zwar bewegen wir uns bei der Integration auf der von ξ, η, ζ nach x, y, z gezogenen geraden Linie; $\varkappa$ ist der Werth der Dichte in einem zwischen ξ, η, ζ und x, y, z im Abstand ϱ von ξ, η, ζ auf dieser Geraden gelegenen Punkt. a, b, c sind die Richtungscosinusse dieser Geraden und R ist ihre Länge.

$$R = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2},$$

$$a = \frac{\xi - x}{R} \text{ u. s. f.}$$

*) Vergl. Gauss' Werke Bd. V, pag. 206 ff.

**) Vergl. Dirichlet-Grube, pag. 18 ff.

***) Vergl. Riemann-Hattendorf, pag. 29 und p. 44.

†) Vergl. Clausius, 3. Aufl., pag. 38 ff

Nun wird H nach a, b, c, R differenzirt, und die Gleichung

$$\frac{dH}{dx} = \frac{dH}{da}\frac{da}{dx} + \frac{dH}{db}\frac{db}{dx} + \frac{dH}{dc}\frac{dc}{dx} + \frac{dH}{dR}\frac{dR}{dx}$$

angewendet. Bei diesen Differentiationen ist das auf der Oberfläche des zu betrachtenden Raums gelegene ξ, η, ζ als constant zu betrachten.

Nun wären jedenfalls für $\varkappa$ Bedingungen aufzustellen, wenn diese Differentialquotienten existiren sollen, und zwar wird man $\varkappa$ selbst differenzirbar annehmen müssen. Ueberdiess genügt zur Sicherung der Richtigkeit der Gleichung

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{da}\frac{da}{dx} + \frac{df}{db}\frac{db}{dx} + \frac{df}{dc}\frac{dc}{dx}$$

die Existenz der Differentialquotienten noch nicht.*)

Alle diese Beweise werden mindestens die Existenz, Endlichkeit und Integrirbarkeit der Differentialquotienten von $\varkappa$ in einem kleinen Gebiet um x, y, z herum verlangen.

Wir wollen nun zu dem, was oben (in Artikel 2) übei $\varkappa$ vorausgesetzt worden ist, die folgende Bedingung hinzufügen:

x, y, z sei der fragliche Punkt.

*Nun sollen zwei positive feste Grössen A und μ existiren,***) *so dass*

$$[\varkappa(a, b, c) - \varkappa(x, y, z)] < A r^{\mu}$$

für alle a, b, c eines gewissen, um den Punkt x, y, z herum abgegrenzten Gebietes. r ist wieder der Abstand,

$$r = \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}.$$

Unter dieser Voraussetzung existiren in diesem bestimmten Punkt x, y, z die Grössen $\frac{d^2 V}{dx^2}$, $\frac{d^2 V}{dy^2}$, $\frac{d^2 V}{dz^2}$, und ihre Summe ist: $\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} = -4\pi\varkappa(x, y, z)$.

*) S. im Anhang: Ueber das totale Differential. Vergl. auch P. du Bois-Reymond, Allg. Functionentheorie, pag. 135 ff.

**) Man kann unbeschadet der Allgemeinheit $\mu < 1$ annehmen.

Zum Beweis setze man:

$$\frac{dV}{dx} = V_1(x, y, z) = \int \varkappa \frac{a-x}{r^3} d\tau.$$

Es ist somit:

$$\frac{V_1(x+\varDelta x, y, z) - V_1(x, y, z)}{\varDelta x} = \int\left((a-x)\left\{\frac{1}{\bar{r}^3} - \frac{1}{r^3}\right\} - \frac{\varDelta x}{\bar{r}^3}\right)\frac{\varkappa d\tau}{\varDelta x},$$

wobei $\bar{r} = \sqrt{r^2 - 2\varDelta x(a-x) + \varDelta x^2}.$

$\varDelta x$ ist hier die Veränderliche.

Nun sollen drei Hilfskugeln construirt werden:

die 1te mit Radius ϱ und Mittelpunkt x, y, z,

die 2te mit demselben Radius ϱ und Mittelpunkt $x + \varDelta x, y, z$,

die 3te endlich mit Radius R und Mittelpunkt x, y, z.

Die beiden ersten Kugeln sollen sich ganz ausschliessen, und die letzte soll die andern ganz in sich enthalten. Mit (ϱ), $(\bar{\varrho})$ und (R) sei der Raum der 1ten, 2ten und 3ten Kugel bezeichnet, mit (t) das ganze Integrationsgebiet.

Nun zerlege man das Integral in vier Integrale über die Gebiete $(t)-(R)$, $(R)-(\varrho)-(\bar{\varrho})$, (ϱ) und $(\bar{\varrho})$.

Die Grössen R, $\varDelta x$, ϱ werden wir später unendlich klein werden lassen in der Weise, dass jede vorhergehende gegenüber der folgenden unendlich gross wird.

Wir setzen ferner:

$$D = \varkappa\,(a-x)\left\{\frac{1}{\bar{r}^3} - \frac{1}{r^3}\right\} - \frac{\varDelta x \,.\, \varkappa}{\bar{r}^3},$$

$$D_0 = \varkappa_0\,(a-x)\left\{\frac{1}{\bar{r}^3} - \frac{1}{r^3}\right\} - \frac{\varDelta x \,.\, \varkappa_0}{\bar{r}^3},$$

wobei $\varkappa_0$ die Dichte in x, y, z selbst bedeuten soll.

Für das erste der vier Integrale gilt $r \geqq R$, da ja a, b, c im Gebiet $(t)-(R)$ liegt. Wir können also unter diesem Integral für kleine $\left[\frac{\varDelta x}{R}\right]$ so entwickeln:

$$\bar{r} = r\left(1 - \frac{2\varDelta x}{r}\,\frac{a-x}{r} + \left(\frac{\varDelta x}{r}\right)^2\right)^{1/2},$$

$$\frac{1}{\bar{r}^3} = \frac{1}{r^3}\left(1 + 3\,\frac{a-x}{r}\,.\,\frac{\varDelta x}{r} + W.\left(\frac{\varDelta x}{r}\right)^2\right),$$

wobei W unter einer festen Grenze bleibt, wofern das Verhältniss $\left[\frac{\Delta x}{R}\right]$ eine gewisse Grösse nicht übersteigt. — Es ist ja $\left[\frac{\Delta x}{r}\right] \leqq \left[\frac{\Delta x}{R}\right]$, und $\left[\frac{a-x}{r}\right] \leqq 1$.

Man bekommt also:

$$\frac{D}{\Delta x} = \frac{3\varkappa(a-x)^2}{r^5} + \varkappa W \frac{a-x}{r}\frac{\Delta x}{r^4} - \frac{\varkappa}{r^3}$$
$$-3\varkappa\frac{a-x}{r}\cdot\frac{\Delta x}{r^4} - \varkappa W\frac{\Delta x}{r}\cdot\frac{\Delta x}{r^4}:$$

d. h. also:

$$\left[\frac{D}{\Delta x} - \varkappa\left(\frac{3(a-x)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right)\right] < const.\ \frac{[\Delta x]}{r^4},$$
$$a\ fortiori < const.\ \frac{[\Delta x]}{R^4}.$$

Somit wird

$$\int\limits_{(t)-(R)}\frac{D}{\Delta x}d\tau - \int\limits_{(t)-(R)}\varkappa\left(\frac{3(a-x)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right)d\tau$$ unendlich klein, wenn man $\frac{[\Delta x]}{R^4}$ unendlich klein macht.

Unter dem zweiten Integral, das über das Gebiet $(R) - (\varrho) - (\overline{\varrho})$ erstreckt ist, entwickle man $\frac{D}{\Delta x}$ auf andere Weise.

Man hat

$$\frac{D}{\Delta x} = \varkappa\left\{\frac{(a-x)(r^3-\overline{r}^3)}{\overline{r}^3 . r^3 . \Delta x} - \frac{1}{r^3}\right\}.$$

Nun ist $\quad r^3 - \overline{r}^3 = r(r^2 - \overline{r}^2) + \overline{r}^2(r - \overline{r}).$

Also $\quad \frac{D}{\Delta x} = \varkappa\left\{\frac{(a-x)(r^2-\overline{r}^2)}{r^2\overline{r}^3 . \Delta x} + \frac{(a-x)(r-\overline{r})}{r^3\overline{r} . \Delta x} - \frac{1}{\overline{r}^3}\right\}.$

Hierin setze man:

$$r^2 - \overline{r}^2 = 2\Delta x(a-x) - \Delta x^2$$
$$r - \overline{r} = \frac{r^2-\overline{r}^2}{r+\overline{r}} = \frac{2\Delta x(a-x) - \Delta x^2}{r+\overline{r}},$$

wodurch man erhält

$$\frac{D}{\Delta x} = \varkappa\left\{\frac{2(a-x)^2 - \Delta x . (a-x)}{r^2\overline{r}^3} + \frac{2(a-x)^2 - \Delta x(a-x)}{r^3 . \overline{r}(r+\overline{r})} - \frac{1}{\overline{r}^3}\right\}.$$

Weil nun

$$[\varkappa - \varkappa_0] < A r^{\mu} \text{ (s. o.)},$$

so wird

$$\left[\frac{D}{\varDelta x} - \frac{D_0}{\varDelta x}\right] < A \left\{ 2 \cdot \left(\frac{a-x}{r}\right)^2 \frac{r^{\mu}}{\bar{r}^3} + \frac{[a-x]}{r} \cdot \frac{[\varDelta x]}{r^{1-\mu}\,\bar{r}^3} \right.$$

$$\left. + 2\left(\frac{a-x}{r}\right)^2 \cdot \frac{1}{r^{1-\mu}\,\bar{r}\,(r+\bar{r})} + \frac{[a-x]}{r} \cdot \frac{[\varDelta x]}{r^{2-\mu}\,\bar{r}\,(r+\bar{r})} + \frac{r^{\mu}}{\bar{r}^3} \right\},$$

indem man rechts die Summe der absoluten Beträge nimmt.

Aus den Ungleichungen

$$\frac{[a-x]}{r} \leqq 1, \quad \frac{[\varDelta x]}{r+\bar{r}} \leqq 1 \text{ (s. o.)}$$

folgt:

$$\alpha)\quad 2\left(\frac{a-x}{r}\right)^2 \frac{r^{\mu}}{\bar{r}^3} \leqq 2\,\frac{1}{\bar{r}^{3-\mu}} \cdot \left(\frac{r}{\bar{r}}\right)^{\mu},$$

$$\beta)\quad \frac{[a-x]}{r} \cdot \frac{[\varDelta x]}{r^{1-\mu}\,\bar{r}^3} \leqq \cdot \frac{1}{\bar{r}^{3-\mu}} \cdot \left(\frac{r}{\bar{r}}\right)^{\mu} \cdot \frac{[\varDelta x]}{\bar{r}},$$

$$\gamma)\quad 2\left(\frac{a-x}{r}\right)^2 \frac{1}{r^{1-\mu} \cdot \bar{r}\,(r+\bar{r})} < \frac{1}{r^{3-\mu}} + \frac{1}{\bar{r}^{3-\mu}}.$$

Von diesen drei Ungleichungen ergeben sich die beiden ersten ohne Weiteres; die letzte ergibt sich durch die Betrachtung, dass

$$2\left(\frac{a-x}{r}\right)^2 \frac{1}{r^{1-\mu}\,\bar{r}\,(r+\bar{r})} < \frac{1}{r^{3-\mu}},$$

wenn

$$r < \bar{r},$$

und

$$2\left(\frac{a-x}{r}\right)^2 \frac{1}{r^{1-\mu}\,\bar{r} \cdot (r+\bar{r})} \leqq \frac{1}{\bar{r}^{3-\mu}},$$

wenn

$$r \geqq \bar{r}.$$

Auf dieselbe Weise rechtfertigt sich die Ungleichung:

$$\delta)\quad \frac{[a-x]}{r} \cdot \frac{[\varDelta x]}{r+\bar{r}} \cdot \frac{1}{r^{2-\mu} \cdot \bar{r}} < \frac{1}{r^{3-\mu}} + \frac{1}{\bar{r}^{3-\mu}}.$$

Ausserdem ist nun, weil r, $\bar{r}$ und $\varDelta x$ ein Dreieck bilden:

$$\bar{r} + [\varDelta x] \geqq r,$$

$$\varepsilon)\quad 1 + \frac{[\varDelta x]}{\bar{r}} \geqq \frac{r}{\bar{r}}.$$

Wir befinden uns im Gebiet $(R) - (\varrho) - (\overline{\varrho})$, wo

$$\zeta)\quad \frac{[\varDelta x]}{r} \leqq \frac{[\varDelta x]}{\varrho},$$

und

$$\eta)\quad \frac{[\varDelta x]}{\overline{r}} \leqq \frac{[\varDelta x]}{\varrho};$$

aus $\eta)$ und $\varepsilon)$ kommt:

$$\vartheta)\quad \frac{r}{\overline{r}} \leqq 1 + \frac{[\varDelta x]}{\varrho}.$$

Bedenkt man nun, dass $\mu < 1$ angenommen werden kann (s. o.), und dass $\frac{[\varDelta x]}{\varrho}$ unendlich gross wird, so ergibt sich aus $\alpha), \beta), \gamma), \delta), \zeta), \vartheta)$ und aus dem Ausdruck für $\left[\frac{D - D_0}{\varDelta x}\right]$, dass:

$$\left[\frac{D}{\varDelta x} - \frac{D_0}{\varDelta x}\right] < const. \left(\frac{1}{r^{3-\mu}} + \frac{1}{\overline{r}^{3-\mu}}\right)\left(\frac{\varDelta x}{\varrho}\right)^2$$

im ganzen Gebiet $R - (\varrho) - (\overline{\varrho})$. Nun gibt es eine Constante, so dass:

$$\int\limits_{(R)-(\varrho)-(\overline{\varrho})} \left(\frac{1}{r^{3-\mu}} + \frac{1}{\overline{r}^{3-\mu}}\right) d\tau < const.\ R^{\mu}.$$

Man folgert aus den beiden letzten Relationen, dass

$$\int\limits_{(R)-(\varrho)-(\overline{\varrho})} \frac{D}{\varDelta x}\, d\tau - \int\limits_{(R)-(\varrho)-(\overline{\varrho})} \frac{D_0}{\varDelta x}\, d\tau$$

unendlich klein wird, wenn man $R^{\mu} \cdot \left(\frac{\varDelta x}{\varrho}\right)^2$ unendlich klein macht.

Das dritte und vierte Integral über die Gebiete (ϱ) und $(\overline{\varrho})$ haben wir noch zu behandeln; diese Integrale sind eigentlich Grenzwerthe von Integralen. In diesen beiden Fällen setzen wir

$$\frac{D}{\varDelta x} = \frac{\varkappa}{\varDelta x}\left(\frac{a - x - \varDelta x}{\overline{r}^3} - \frac{a - x}{r^3}\right),$$

und weil

$$\frac{[a - x]}{r} \leqq 1,$$

und

$$\frac{[a - x - \varDelta x]}{\overline{r}} \leqq 1,$$

so ist

$$\left[\frac{D}{\varDelta x}\right] \leqq \left[\frac{\varkappa}{\varDelta x}\right]\left(\frac{1}{\overline{r}^2} + \frac{1}{r^2}\right).$$

Nun ist aber:

$$\int\limits_{(\varrho)} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\overline{r}^2}\right) d\tau < const.\ \varrho,$$

$$\int\limits_{\overline{(\varrho)}} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\overline{r}^2}\right) d\tau < const.\ \varrho.$$

Also werden die Integrale $\int\limits_{(\varrho)} \frac{D}{\Delta x}$ und $\int\limits_{\overline{(\varrho)}} \frac{D}{\Delta x}$ beide $< const.\ \frac{\varrho}{[\Delta x]}$.

Somit werden $\int\limits_{(\varrho)} \frac{D}{\Delta x}$ und $\int\limits_{\overline{(\varrho)}} \frac{D}{\Delta x}$ unendlich klein, wenn man $\frac{\varrho}{[\Delta x]}$ unendlich klein macht. Dasselbe gilt von $\int\limits_{(\varrho)} \frac{D_0}{\Delta x}$ und $\int\limits_{\overline{(\varrho)}} \frac{D_0}{\Delta x}$.

Wir haben nun zu zeigen, dass die drei Grössen R, $[\Delta x]$, ϱ so unendlich klein gemacht werden können, dass sowohl $\frac{[\Delta x]}{R^4}$, als $R^\mu . \left(\frac{\Delta x}{\varrho}\right)^2$ und $\frac{\varrho}{[\Delta x]}$ unendlich klein werden. Zu diesem Zweck braucht man nur zu setzen:

$$[\Delta x] = R^5,$$
$$\varrho \quad = R^{5+\frac{\mu}{4}},$$

und R als die unabhängige Variable zu betrachten, die unendlich klein wird.

Wir wenden die in den vorhergehenden Entwicklungen gewonnenen Resultate an auf die folgende selbstverständliche Gleichung:

$$\frac{V_1(x+\Delta x, y, z) - V_1(x, y, z)}{\Delta x} = \int\limits_{(t)-(R)} \varkappa \left(\frac{3\,(a-x)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right) d\tau$$

$$+ \left\{ \int\limits_{(t)-(R)} \frac{D}{\Delta x}\, d\tau - \int\limits_{(t)-(R)} \varkappa \left(\frac{3\,(a-x)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right) d\tau \right\} + \int\limits_{(R)-(\varrho)-\overline{(\varrho)}} \frac{D_0}{\Delta x}\, d\tau$$

$$+\left\{\int\limits_{(R)-(\varrho)-(\overline{\varrho})}\frac{D}{\varDelta x}\,d\tau-\int\limits_{(R)-(\varrho)-(\overline{\varrho})}\frac{D_0}{\varDelta x}\,d\tau\right\}+\int\limits_{(\varrho)}\frac{D_0}{\varDelta x}\,d\tau+\int\limits_{(\overline{\varrho})}\frac{D_0}{\varDelta x}\,d\tau+\left\{\int\limits_{(\varrho)}\frac{D}{\varDelta x}\,d\tau\right.$$

$$\left.+\int\limits_{(\overline{\varrho})}\frac{D}{\varDelta x}\,d\tau-\int\limits_{(\varrho)}\frac{D_0}{\varDelta x}\,d\tau-\int\limits_{(\overline{\varrho})}\frac{D_0}{\varDelta x}\,d\tau\right\}.$$

Alle in den Klammern stehenden Grössen werden mit R unendlich klein; d. h. also, es wird

$$\frac{V_1(x+\varDelta x,y,z)-V_1(x,y,z)}{\varDelta x}-\int\limits_{(t)-(R)}\varkappa\left(\frac{3\,(a-x)^2}{r^5}-\frac{1}{r^3}\right)d\tau-\int\limits_{(R)}\frac{D_0}{\varDelta x}\,d\tau$$

mit R unendlich klein.

Nun ist aber:

$$\int\limits_{(R)}\frac{D_0}{\varDelta x}\,d\tau=\frac{1}{\varDelta x}\left\{-\frac{4}{3}\pi\,\varkappa_0\,\varDelta x+o\right\}=-\frac{4}{3}\pi\,\varkappa_0.$$

Wofern also $\int\limits_{(t)-(R)}\varkappa\left(\frac{3\,(a-x)^2}{r^5}-\frac{1}{r^3}\right)d\tau$ für $R=o$ einen limes besitzt, ist die Existenz von $\frac{d^2V}{dx^2}$ erwiesen, und man bekommt:

$$\frac{d^2V}{dx^2}=\lim_{R=o}\int\limits_{(t)-(R)}\varkappa\left(\frac{3\,(a-x)^2}{r^5}-\frac{1}{r^3}\right)d\tau-\frac{4}{3}\pi\,\varkappa_0.$$

Die Existenz des genannten Grenzwerths ist in diesem Fall dadurch wesentlich bedingt, dass die Gestalt des um den Punkt x, y, z herum ausgeschnittenen Gebiets eben eine Kugel ist mit Mittelpunkt x, y, z.

Zum Beweis haben wir zu zeigen, dass $\int\limits_{(R)-(R')}\varkappa\left(\frac{3\,(a-x)^2}{r^5}-\frac{1}{r^3}\right)d\tau$ — wo $R'<R$ — mit R unendlich klein wird.*) Wir setzen:

$$\varkappa=\varkappa_0+Br^{\mu},$$

so ist

$$[B]<A\ \text{(s. o).}$$

*) Nach dem allgemeinen Convergenzprincip; vergl. P. du Bois-Reymond, Allg. Functionentheorie, pag. 6.

Man erhält dann

$$\varkappa_0 \int\limits_{(R)-(R')} \left(\frac{3\,(a-x)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right) d\tau + \int\limits_{(R)-(R')} B \left(\frac{3\,(a-x)^2}{r^{5-\mu}} - \frac{1}{r^{3-\mu}} \right) d\tau.$$

Der zweite Theil wird offenbar mit R unendlich klein, was auch R' sei, wofern nur $R' < R$. Der erste wird mit

$$a - x = r \sin \vartheta \cos \varphi,$$
$$d\tau \;= r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\varphi \, d\vartheta$$

zu

$$\varkappa_0 \int\limits_{R'}^{R} \frac{dr}{r} \int\limits_{o}^{\pi} \sin \vartheta \, d\vartheta \int\limits_{o}^{2\pi} (3 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi - 1) \, d\varphi$$

$$= \varkappa_0 \, \pi \int\limits_{R'}^{R} \frac{dr}{r} \int\limits_{o}^{\pi} (3 \sin^2 \vartheta - 2) \sin \vartheta d\vartheta$$

$$= o.$$

Es existiren also die Grössen $\frac{d^2 V}{dx^2}$, $\frac{d^2 V}{dy^2}$ und $\frac{d^2 V}{dz^2}$, und es ist:

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = \lim_{R=o} \int\limits_{(t)-(R)} \varkappa \left(\frac{3\,(a-x)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right) d\tau - \frac{4}{3} \pi \varkappa_0 ,$$

$$\frac{d^2 V}{dy^2} = \lim_{R=o} \int\limits_{(t)-(R)} \varkappa \left(\frac{3\,(b-y)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right) d\tau - \frac{4}{3} \pi \varkappa_0 ,$$

$$\frac{d^2 V}{dz^2} = \lim_{R=o} \int\limits_{(t)-(R)} \varkappa \left(\frac{3\,(c-z)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right) d\tau - \frac{4}{3} \pi \varkappa_0 ,$$

woraus man durch Summation erhält:

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} = -4 \pi \varkappa_0 .$$

5.

Stetigkeit dieser zweiten Ableitungen.

Wir führen über die Function $\varkappa$ eine weitere Voraussetzung ein:

Es soll ein Continuum existiren, so dass für je zwei beliebige Punkte x', y', z' und x'', y'', z'' dieses Continuums gilt:

$$[\varkappa(x'', y'', z'') - \varkappa(x', y', z')] < A \varrho^{\mu} ,$$

wobei A und μ constant und positiv sind, und ϱ den Abstand der Punkte bedeutet,

$$\varrho = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2}.$$

Nun kann der Satz bewiesen werden:

Unter der genannten Voraussetzung sind $\frac{d^2V}{dx^2}, \frac{d^2V}{dy^2}, \frac{d^2V}{dz^2}$ *stetige Functionen von x, y, z im ganzen Continuum.*

Um diess z. B. für $\frac{d^2V}{dx^2}$ nachzuweisen, braucht nur die Stetigkeit von

$$U(x, y, z) = \lim_{R=o} \int_{(t)-(R)} \varkappa \left(\frac{3(a-x)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right) d\tau$$

gezeigt zu werden.

Wir bezeichnen mit $\overline{\varkappa_0}$ die Dichte in $x + \varDelta x, y + \varDelta y, z + \varDelta z$, mit $\varkappa_0$ die Dichte in x, y, z, und mit $\varkappa$ die in a, b, c. Ferner sei

$$\overline{r} = \sqrt{(a - x - \varDelta x)^2 + (b - y - \varDelta y)^2 + (c - z - \varDelta z)^2}.$$

Nun ist:

$$- U(x + \varDelta x, y + \varDelta y, z + \varDelta z) + U(x, y, z)$$

$$= \lim_{R=o} \left\{ \int_{(t)-(R)} \varkappa \left(\frac{3(a-x)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right) d\tau - \int_{(t)-(\overline{R})} \varkappa \left(\frac{3(a - x - \varDelta x)^2}{\overline{r}^5} - \frac{1}{\overline{r}^3} \right) d\tau \right\},$$

wenn man mit $(\overline{R})$ den Raum einer mit Radius R um $x + \varDelta x, y + \varDelta y, z + \varDelta z$ abgegrenzten Kugel bezeichnet, gerade wie unter (R) eine Kugel mit demselben Radius und mit Mittelpunkt x, y, z verstanden werden soll.

Wir führen einen zweiten Kugelradius R' ein, $R' > R$, in Beziehung auf welchen wir dieselben Bezeichnungen (R') und $(\overline{R'})$ anwenden. Auf diese Weise erhalten wir:

$$- U(x + \varDelta x, y + \varDelta y, z + \varDelta z) + U(x, y, z)$$

$$= I_1 - I_2 + \lim_{R=o} I_3 - \lim_{R=o} I_4,$$

wofern

$$I_1 = \int_{(t)-(R')} \varkappa \left(\frac{3(a-x)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right) d\tau,$$

$$I_2 = \int_{(t)-(\overline{R'})} \varkappa \left(\frac{3(a - x - \varDelta x)^2}{\overline{r}^5} - \frac{1}{\overline{r}^3} \right) d\tau,$$

$$I_3 = \int\limits_{(R')-(R)} \varkappa \left(\frac{3(a-x)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right) d\tau,$$

$$I_4 = \int\limits_{\overline{(R')}-\overline{(R)}} \varkappa \left(\frac{3(a-x-\Delta x)^2}{\overline{r}^5} - \frac{1}{\overline{r}^3} \right) d\tau$$

gesetzt wird.

Weil nun

$$\left[\frac{3(a-x)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right] \leqq \frac{2}{r^3},$$

$$\left[\frac{3(a-x-\Delta x)^2}{\overline{r}^5} - \frac{1}{\overline{r}^3} \right] \leqq \frac{2}{\overline{r}^3},$$

und

$$[\varkappa - \varkappa_0] < A r^\mu,$$

$$[\varkappa - \overline{\varkappa_0}] < A \overline{r}^\mu,$$

so findet man

$$I_3 = \varkappa_0 \int\limits_{(R')-(R)} \left(\frac{3(a-x)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right) d\tau + 2\beta \int\limits_{(R')-(R)} \frac{d\tau}{r^{3-\mu}},$$

$$I_4 = \overline{\varkappa}_0 \int\limits_{\overline{(R')}-\overline{(R)}} \left(\frac{3(a-x-\Delta x)^2}{\overline{r}^5} - \frac{1}{\overline{r}^3} \right) d\tau + 2\overline{\beta} \int\limits_{\overline{(R')}-\overline{(R)}} \frac{d\tau}{\overline{r}^{3-\mu}},$$

wo

$$[\beta] \leqq A,$$

und

$$[\overline{\beta}] \leqq A.$$

Der erste Theil von I_3 und I_4 ist o; der zweite Theil von I_3 und I_4 wird mit R' unendlich klein; d. h. man kann R' so klein wählen, dass diese Grössen für alle R, Δx, Δy, Δz unter einer beliebig klein gewählten Grenze liegen. Dasselbe gilt also von $\lim\limits_{R=o} I_3$ und $\lim\limits_{R=o} I_4$ für beliebige Δx, Δy, Δz. Hält man nun den Werth von R' fest, so kann eine Grösse δ gefunden werden, so dass für alle Δx, Δy, Δz, wo

$$[\Delta x] < \delta,$$

$$[\Delta y] < \delta,$$

$$[\Delta z] < \delta$$

ist, die Differenz $I_1 - I_2$ kleiner wird als ein beliebig vorgeschriebener Werth. Hiemit ist unter der angegebenen Bedingung die Stetigkeit von $\frac{d^2V}{dx^2}$, $\frac{d^2V}{dy^2}$, $\frac{d^2V}{dz^2}$ bewiesen.

Zweiter Abschnitt.

Das Flächenpotential.

6.

Definition eines Punktsystems.

Ehe wir zu den Flächenintegralen übergehen, müssen wir einige Betrachtungen über Fläche und Flächeninhalt vorausschicken. Einen genauen Begriff von dem Inhalt einer Fläche suchen wir auf folgendem Weg zu gewinnen: Wir beschreiben in die Fläche hinein eine Anzahl von aneinanderschliessenden Dreiecken, welche näherungsweise die ganze Fläche erfüllen, und bestimmen den Inhalt als Grenzwerth der Flächensumme dieser Dreiecke, indem wir diese Dreiecke unendlich klein machen. Um der unbestimmten Vorstellung von einer beliebigen Fläche auszuweichen, führen wir ein Punktsystem ein, dessen Eigenschaften dazu hinreichen, das Vorhandensein der genannten Summengrenze zu beweisen. Das räumliche Punktsystem beziehen wir auf ein ebenes in folgender Weise:

In der Ebene der Punkte u, v seien zwei Punktsysteme definirt, das der $\mathfrak{C}$ und das der $\mathfrak{L}$, beide Systeme — jedes für sich — ein Continuum*) bildend. Die Grenzpunkte des Systems der $\mathfrak{C}$ bezeichne man mit $\mathfrak{G}$. Jeder Punkt $\mathfrak{C}$ und jeder Punkt $\mathfrak{G}$ sei zugleich ein Punkt $\mathfrak{L}$, also ein innerer Punkt des zweiten Continuums. Als gemeinsame Bezeichnung für die $\mathfrak{C}$ und die $\mathfrak{G}$

*) Es ist einleuchtend, wie diese Ausdrücke den räumlichen Verhältnissen analog in der Ebene zu verstehen sind.

benütze man den Buchstaben $\mathfrak{F}$. Jedem Punkt $\mathfrak{L}$ entspreche nun ein bestimmter Punkt des Raums vermöge der Gleichungen:

$$a = \varphi(u, v),$$
$$b = \psi(u, v),$$
$$c = \chi(u, v),$$

wo φ, ψ, χ endlich, eindeutig und stetig sein sollen. Ferner sollen in jedem Punkt $\mathfrak{L}$ die partiellen Ableitungen

$$\varphi_1(u, v) = \frac{d\varphi(u, v)}{du}, \quad \varphi_2(u, v) = \frac{d\varphi(u, v)}{dv},$$

$$\psi_1(u, v) = \frac{d\psi(u, v)}{du}, \quad \psi_2(u, v) = \frac{d\psi(u, v)}{dv},$$

$$\chi_1(u, v) = \frac{d\chi(u, v)}{du}, \quad \chi_2(u, v) = \frac{d\chi(u, v)}{dv}$$

existiren und als Functionen von u, v stetig sein. Die den Punkten $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{F}$ entsprechenden Punkte im Raum bezeichne man in analoger Weise mit C, L, G, F.

Ausserdem mache man noch folgende besonderen Voraussetzungen:

1) Zu zwei verschiedenen $\mathfrak{F}$ sollen stets zwei Punkte F im Raum gehören, die von einander verschieden sind.

2) In keinem Punkt $\mathfrak{F}$ seien die Grössen

$$\psi_1\chi_2 - \psi_2\chi_1, \quad \chi_1\varphi_2 - \chi_2\varphi_1, \quad \varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1$$

alle drei zugleich null.

3) Die $\mathfrak{G}$ für sich sollen ein integrirbares Punktsystem bilden.

Das System der Punkte F wird in diesen Untersuchungen die Fläche vertreten.

7.

Die einfachsten Eigenschaften des Punktsystems.

Die nächstliegende Eigenschaft des Systems der Punkte F ist nun die, dass jeder Punkt des Raums, in dessen unendlicher Nähe Punkte F angetroffen werden, d. h. jeder *Verdichtungspunkt* des Systems gleichfalls ein Punkt F ist. Diess ergibt sich leicht aus der Verbindung der beiden Umstände, dass die F in stetiger Weise von den $\mathfrak{F}$ abhängen, und dass die $\mathfrak{F}$ selbst

die von den F zu beweisende Eigenschaft besitzen. Der Satz, den man ausserdem dabei braucht, und der hier noch mehrfach zur Anwendung kommen wird, ist der folgende:

> Ist jedem Punkt eines ganz im Endlichen liegenden Punktsystems eine Grösse f zugeordnet, und kommt f einem gewissen Werth g unendlich nahe, so gibt es mindestens einen Punkt — es ist entweder ein Punkt des Systems oder ein Verdichtungspunkt desselben —, in dessen unendlicher Nähe f dem Werth g unendlich nahe kommt.

Dabei kann es sich um ein ebenes oder räumliches System handeln. Der Satz gilt auch in ganz entsprechender Weise, wenn man jedem Punkt des Systems ein Grössensystem zuordnet, und dieses einem bestimmten Werthsystem unendlich nahe kommt. Aus dem erstgenannten Satz ergibt sich leicht die Existenz des Maximums oder Minimums einer in einem Continuum mit Einschluss der Grenze stetigen Function des Orts.*)

Die F und $\mathfrak{F}$ entsprechen einander wechselsweise eindeutig. Ferner ist nicht nur F in stetiger Abhängigkeit von $\mathfrak{F}$, sondern auch umgekehrt: nachdem man um einen bestimmten Punkt $\mathfrak{F}_0$ einen Kreis K mit beliebigem Radius in der u, v-Ebene beschrieben hat, lässt sich stets um das entsprechende F_0 eine Kugel beschreiben mit einem solchen Radius τ, dass für alle in dieser Kugel liegenden F die entsprechenden $\mathfrak{F}$ im Kreis K liegen. Ordnet man nämlich jedem Punkt $\mathfrak{F}$ die Grösse l zu, um welche das entsprechende F von F_0 absteht, so muss l ein Minimum h besitzen, wenn man nur die $\mathfrak{F}$ in Betracht zieht, die ausserhalb oder auf K liegen. Diess folgt aus den eben citirten Weierstrass'schen Sätzen. Der Punkt $\mathfrak{F}'$, in welchem das Minimum erreicht wird — einen gibt es mindestens —, liegt ausserhalb oder auf K; im Raum ist demnach F' von F_0 verschieden, und somit auch $h > o$. Nun braucht man nur $\tau < h$ zu wählen.

Nun kann folgender Schluss gemacht werden:**) Zu jeder Länge $\mathfrak{t}$ kann eine Länge t so bestimmt werden, dass für je zwei

---

*) Diese Sätze rühren von Herrn Weierstrass her. Der letzte findet sich z. B. im Borchardt'schen Journal Bd. 72, pag. 141 Note.

**) Vergl. Lüroth, Math. Annalen Bd. 6, pag. 319.

zu den F gehörige, um weniger als t von einander abstehende Punkte die zugehörigen $\mathfrak{F}$ um weniger als $\mathfrak{t}$ von einander abstehen.

8.

Einführung neuer Hilfspunktsysteme.

Das nächste Ziel unserer Untersuchung ist nun, zu zeigen, dass das Gebiet der Punkte $\mathfrak{F}$ über seine Grenze hinaus so erweitert werden kann, dass dabei das neue grössere Gebiet die in Art. 6 mit 1) und 2) bezeichneten Eigenschaften behält.

Zunächst ist leicht die Existenz einer Grösse δ_1 zu beweisen, die so beschaffen ist, dass alle Punkte in jedem mit Radius δ_1 um ein $\mathfrak{F}$ beschriebenen Kreis zu den $\mathfrak{L}$ gehören. Nun definire man ein neues Punktsystem in folgender Weise. Man wähle eine Grösse $\delta < \delta_1$ und denke sich um jeden Punkt $\mathfrak{C}$ einen Kreis mit Radius δ beschrieben. Die Gesammtheit der in diesen Kreisen liegenden Punkte — die Punkte der Peripherie liegen im Innern von anderen Kreisen — bildet ein Continuum. Jeder Punkt $\mathfrak{F}$ ist ein innerer Punkt dieses neuen Continuums, und jeder Punkt des letzteren, sowie jeder Grenzpunkt des letzteren Continuums ist ein Punkt $\mathfrak{L}$. Die Punkte des Innern und der Grenze des neuen Continuums bezeichne man mit $\mathfrak{H}$.

Die Grösse

$$R = \sqrt{(\psi_1 \chi_2 - \psi_2 \chi_1)^2 + (\chi_1 \varphi_2 - \chi_2 \varphi_1)^2 + (\varphi_1 \psi_2 - \varphi_2 \psi_1)^2},$$

wo die Wurzel stets positiv genommen werden soll, ist eindeutig, endlich und stetig im ganzen Gebiet $\mathfrak{H}$ mit Einschluss der Grenze. In jedem Punkt $\mathfrak{F}$ ist R von Null verschieden, woraus man schliessen kann, dass der Werth von R, wenn man nur die Punkte $\mathfrak{F}$ in Betracht zieht, ein von Null verschiedenes Minimum S hat. Ferner muss es möglich sein, eine Grösse $\tau < \delta$ zu finden, so dass in zwei Punkten $\mathfrak{H}$, die um weniger als τ verschieden sind, die zugehörigen Werthe von R sich um weniger als S unterscheiden. Wählt man nun $\delta' < \tau$ und bestimmt mittelst δ' ein neues Continuum, wie wir oben eines mittelst δ bestimmt haben, so wird die Eigenschaft 1) für die Punkte dieses neuen Continuums und seiner Grenze erfüllt sein D. h. in jedem Punkt $\mathfrak{H}'$, wie wir diese Punkte heissen wollen, ist R von o verschieden.

Wir betrachten jetzt zwei Punkte $\mathfrak{H}'$, nämlich $\mathfrak{H}'_1$ und $\mathfrak{H}'_2$; die entsprechenden Punkte im Raum seien H'_1 und H'_2, und wir wollen das Verhältniss der Strecken $\mathfrak{H}'_1\,\mathfrak{H}'_2$ und $H'_1\,H'_2$ untersuchen.

Man habe zwei Punkte u, v und $u + \xi$, $v + \eta$ in der u, v-Ebene. Der Punkt u, v sei ein Punkt $\mathfrak{H}'$. ξ und η seien unter einer gewissen Grenze, so dass $u + \xi$, $v + \eta$ jedenfalls einen Punkt $\mathfrak{L}$ bedeutet; im Uebrigen seien ξ und η beliebig. Die entsprechenden Punkte im Raum seien a, b, c und $a + \alpha$, $b + \beta$, $c + \gamma$; dann ist

$$\alpha = \xi\,\varphi_1\,(u, v) + \eta\,\varphi_2\,(u, v) + \varrho\,e,$$
$$\beta = \xi\,\psi_1\,(u, v) + \eta\,\psi_2\,(u, v) + \varrho\,e,$$
$$\gamma = \xi\,\chi_1\,(u, v) + \eta\,\chi_2\,(u, v) + \varrho\,e,$$

wobei

$$\varrho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2},$$

und unter den e solche Grössen zu verstehen sind, die von u, v, ξ, η abhängen und die, abgesehen vom Verhältniss von ξ und η, für alle u, v im Gebiet $\mathfrak{H}'$ zugleich unendlich klein werden, wenn ϱ unendlich klein wird. *)

Wirft man in diesen Gleichungen die Glieder von der Form $\varrho\,e$ ab, so erhält man

$$\alpha' = \xi\varphi_1 + \eta\varphi_2,$$
$$\beta' = \xi\psi_1 + \eta\psi_2,$$
$$\gamma' = \xi\chi_1 + \eta\chi_1.$$

Hält man nun $\mathfrak{H}'$ d. h. u und v fest und betrachtet ξ und η als unbeschränkt veränderlich, so stellen diese Gleichungen eine Ebene dar, indem der Voraussetzung gemäss eine der Determinanten $\psi_1\,\chi_2 - \psi_2\,\chi_1$, $\chi_1\,\varphi_2 - \chi_2\,\varphi_1$, $\varphi_1\,\psi_2 - \varphi_2\,\psi_1$ von Null verschieden ist.

Aus eben diesem Grund wird das Werthsystem $\alpha' = o$, $\beta' = o$, $\gamma' = o$ nur erhalten für $\xi = o$, $\eta = o$. Man schliesst hieraus, dass für jedes feste u, v, das zu den $\mathfrak{H}'$ gehört, und für alle ξ, η, die der Bedingung $\xi^2 + \eta^2 = 1$ genügen, die Grösse $\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2$ ein Maximum A^2 und ein Minimum B^2 besitzt, welches von Null verschieden ist. Man hat also:

---

*) S. im Anhang: Ueber das totale Differential.

$$\sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2} \leq A \sqrt{\xi^2 + \eta^2},$$
$$\sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2} > B \sqrt{\xi^2 + \eta^2}.$$

Zu jedem Punkt $\mathfrak{H}'$ gehört ein A und ein B. Man sieht leicht, dass A und B sich stetig mit $\mathfrak{H}'$ ändern, und da diess auch in der Grenze gilt, so kann auf die Existenz zweier Grössen M und N geschlossen werden, die so beschaffen sind, dass

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2} \leq M \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \\ \sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2} \geq N \sqrt{\xi^2 + \eta^2},\end{array}\right\} \quad \text{I.}$$

wobei
$$N > o,$$
und die Gleichungen für alle $\mathfrak{H}'$ und alle ξ, η gelten. N ist das nothwendig von Null verschiedene Minimum von B im Bereich der $\mathfrak{H}'$.

Die letzten Relationen betrachte man im Zusammenhang mit

$$\left.\begin{array}{l}\alpha = \alpha' + \varrho e, \\ \beta = \beta' + \varrho e, \\ \gamma = \gamma' + \varrho e.\end{array}\right\} \quad \text{II.}$$

Bedenkt man, dass
$$\alpha' < const.\, \varrho \text{ u. s. f.} \quad \text{(nach I.)},$$
so kann aus II. hergeleitet werden
$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} = (\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 + \varrho^2 e)^{\frac{1}{2}},$$
wo e wieder auf dieselbe Art mit ϱ unendlich klein wird. Also ist
$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} = \sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2} \left(1 + \frac{\varrho^2}{\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2} e\right)^{\frac{1}{2}},$$
wofern $\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2$ von Null verschieden ist. Nach I. ist diess der Fall, wenn ξ und η nicht beide null sind; dabei ist aber nach I. auch $\frac{\varrho^2}{\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2}$ eine Grösse, die unter einer festen Grenze und über einer von Null verschiedenen Grenze bleibt. Somit:
$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} = \sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2}\,(1 + e) \quad \text{III.}$$
Wenn daher für ξ und η eine obere Grenze von genügender Kleinheit festgesetzt wird, so sind stets die Punkte a, b, c und $a + \alpha$, $b + \beta$, $c + \gamma$ von einander verschieden, so oft ξ und η nicht beide null sind.

Wir können also auch eine Grösse s wählen von der Beschaffenheit, dass für je zwei verschiedene Punkte $\mathfrak{H}'$, die um

weniger als s von einander abstehen, die zugehörigen H' nothwendig verschieden sind. Wir wählen ferner zwei positive Grössen t und w, so dass $\mathrm{t} + 2w < s$, sonst beliebig. Weiter wählen wir eine Grösse t, so dass für zwei F, die um weniger als t von einander abstehen, die zugehörigen $\mathfrak{F}$ einen Abstand $< \mathrm{t}$ besitzen, und endlich eine Grösse $\sigma < w$ von der Beschaffenheit, dass für zwei Punkte $\mathfrak{H}'$, die um weniger als σ von einander abstehen, die Distanz der zugehörigen H' kleiner ist als $\frac{t}{2}$.

Denkt man sich jetzt um jeden Punkt $\mathfrak{C}$ einen Kreis mit demselben Radius $\delta'' < \sigma$ und definirt so ein neues Continuum, dessen innere Punkte und Grenzpunkte mit $\mathfrak{H}''$ bezeichnet werden sollen, so kann man beweisen, dass zu verschiedenen $\mathfrak{H}''$ auch verschiedene H'' im Raum gehören.

Beweis:

Gesetzt, man habe zwei Punkte $\mathfrak{H}''$, nämlich $\mathfrak{H}''_1$ und $\mathfrak{H}''_2$, deren entsprechende Punkte im Raum in dem Punkt H'' zusammenfallen. Nun lassen sich doch zwei Punkte $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ finden, so dass die Abstände von $\mathfrak{H}''_1$ und $\mathfrak{F}_1$ und von $\mathfrak{H}''_2$ und $\mathfrak{F}_2$ kleiner sind als σ, weil $\delta'' < \sigma$. F_1 und F_2 seien die zugehörigen Punkte im Raum. Die Distanz von F_1 und H'', sowie die von F_2 und H'' ist also $< \frac{t}{2}$, die von F_1 und F_2 ist also $< t$, und somit der Abstand von $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ kleiner als t. Weil nun

$$\mathfrak{H}''_1 \mathfrak{H}''_2 \leqq \mathfrak{H}''_1 \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 + \mathfrak{F}_2 \mathfrak{H}''_2,$$

so ist der Abstand von $\mathfrak{H}''_1$ und $\mathfrak{H}''_2$

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}''_1 \mathfrak{H}''_2 &< \mathrm{t} + 2\sigma, \\ &< \mathrm{t} + 2w, \\ &< s, \end{aligned}$$

diess ist aber ein Widerspruch. Die den Punkten $\mathfrak{H}''_1$ und $\mathfrak{H}''_2$ entsprechenden Punkte im Raum können also nicht zusammenfallen. Das Gebiet der $\mathfrak{H}''$ hat also die verlangten Eigenschaften; die $\mathfrak{H}''$ und H'' entsprechen sich wechselsweise eindeutig, woraus (nach Art. 7) folgt, dass auch die Lage von $\mathfrak{H}''$ eine stetige Function der Lage von H'' ist.

9.

Die Tangentialebene.

Die im Vorhergehenden gegebenen Entwicklungen enthalten schon alle Eigenschaften der Tangentialebene. Bedeute u, v einen festen Punkt $\mathfrak{H}''$, also $\mathfrak{H}''_0$, $u + \xi$, $v + \eta$ einen veränderlichen Punkt $\mathfrak{H}''$ in der Nähe desselben. Die Coordinaten von H''_0 und H'' seien a, b, c und $a + \alpha$, $b + \beta$, $c + \gamma$; ferner seien $a + \alpha'$, $b + \beta'$, $c + \gamma'$ die Coordinaten eines Punkts T; α', β', γ' wie oben. Dann sind in den Gleichungen II.

$$\alpha = \alpha' + \varrho e \quad \text{u. s. f.}$$

die mit ϱe bezeichneten Grössen die Componenten der Strecke $T \rightarrow H''$. Ferner

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} = H''_0 H'',$$
$$\sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2} = H''_0 T.$$

Die Grössen $\dfrac{H''_0 T}{H''_0 H''} - 1$ und $\dfrac{T H''}{H''_0 T}$ werden also nach I, II und III mit ϱ unendlich klein, also auch der Winkel der Strecken $H''_0 \rightarrow H''$ und $H''_0 \rightarrow T$, und der Winkel von $H''_0 \rightarrow H''$ mit der Ebene, in der $a + \alpha'$, $b + \beta'$, $c + \gamma'$ liegt, und die durch die Gleichungen

$$\alpha' = \xi \varphi_1 (u, v) + \eta \varphi_2 (u, v),$$
$$\beta' = \xi \psi_1 (u, v) + \eta \psi_2 (u, v),$$
$$\gamma' = \xi \chi_1 (u, v) + \eta \chi_2 (u, v)$$

gegeben ist. Diese Ebene ist also eine wahre Tangentialebene.

Weil nun immer ϱ unendlich klein wird, wenn H'' dem Punkt H''_0 unendlich nahe kommt (Art. 7, 8), so kann man diess auch so aussprechen: Nachdem man eine gewisse Grösse ε gewählt hat, kann eine gewisse Umgebung von H''_0 gefunden werden, in der kein Punkt P des Raums, für den der Winkel von $H''_0 \rightarrow P$ mit der Tangentialebene in H''_0 grösser ist als ε, zu den Punkten H'' gehört, abgesehen von H''_0 selbst.

Die Richtung der Tangentialebene ändert sich stetig mit dem Berührungspunkt; es sind ja $\psi_1 \chi_2 - \psi_2 \chi_1$, $\chi_1 \varphi_2 - \chi_2 \varphi_1$ und $\varphi_1 \psi_2 - \varphi_2 \psi_1$ die sich stetig ändernden Componenten einer auf der Tangentialebene senkrecht stehenden Strecke, die in keinem Punkt $\mathfrak{H}''$ verschwindet.

10.

Normale.

Wir betrachten nun einen bestimmten Punkt unserer Fläche, und zwar einen innern, also einen Punkt C; man bezeichne ihn mit C_0. Der zugehörige Punkt der u, v-Ebene sei $\mathfrak{C}_0$. x, y, z oder (x) sei ein beliebiger Punkt des Raums. Nun existirt ein Punkt, in dem der Abstand $(x)F$ sein Minimum erreicht. Wegen der wechselseitig eindeutigen Beziehung zwischen den $\mathfrak{F}$ und den F ist C_0 nothwendig von jedem Punkt G verschieden, und der Abstand $C_0 G$ hat für alle G ein von Null verschiedenes Minimum h. Nehmen wir nun (x) von C_0 um weniger als h entfernt an, so kann der Punkt, in dem $(x)F$ sein Minimum erreicht, nicht zu den G gehören, es ist also ein Punkt C, der mit C'_0 bezeichnet werden möge. Dann ist aber $(x) \longrightarrow C'_0$ senkrecht auf der Tangentialebene in C'_0. Gesetzt, diess sei nicht der Fall, so definiren wir in Beziehung auf C'_0 zwei Punkte C und T, wie wir oben $\mathfrak{H}''$ und T in Beziehung auf $\mathfrak{H}_0''$ bestimmt haben. Man kann dann leicht sehen, dass $(x)T$ kleiner gemacht werden kann als $(x)C'_0$ für beliebig kleine ξ, η, wenn das Verhältniss der letzteren Grössen entsprechend gewählt wird. Weil dabei die Differenz der Strecken $(x)T$ und $(x)C'_0$ gerade von der Ordnung von $\sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ wird, und die Ordnung von CT kleiner ist, ist leicht zu sehen, dass dann auch $(x)C$ kleiner wird als $(x)C'_0$. Diess widerspricht aber der Annahme, dass $(x)C'_0$ ein absolutes Minimum ist.

Nicht ganz so verhält sich die Sache, wenn wir einen Punkt G_0, also einen Punkt der Grenze unserer Fläche in Betracht ziehen statt des vorhin gebrauchten C_0. Hier wird das Minimum unter Umständen in der Grenze erreicht, und dann können ξ und η nicht beliebig variirt werden. Nun haben wir aber in Art. 8 gezeigt, dass das Punktsystem der $\mathfrak{F}$ so erweitert werden kann, dass es seine Eigenschaften behält, ausser der dritten, der Integrirbarkeit der Grenzpunkte, die wir hier nicht brauchen. Für das Gebiet $\mathfrak{H}''$ ist $\mathfrak{G}_0$ ein innerer Punkt, und nun gelten dieselben Schlüsse. Zu jedem (x) in einer gewissen Umgebung von G_0 kann also wenigstens ein Punkt $\mathfrak{H}''$ gefunden werden, so dass

$H'' \longrightarrow (x)$ ein Minimum wird. Dann steht $H'' \rightarrow (x)$ senkrecht auf der Tangentialebene in H'', und weil offenbar $(x) H'' \leqq (x) G_0$, und somit $H'' G_0 \leqq 2 (x) G_0$, so kommt H'' dem G_0, und $\mathfrak{H}''$ dem $\mathfrak{G}_0$ unendlich nahe, wenn (x) unendlich nahe an G_0 herankommt.

11.

Flächeninhalt.

Wir können nunmehr den Flächeninhalt in der schon erwähnten Weise definiren, doch muss die Theilung noch einer Beschränkung unterworfen werden.

Wir gebrauchen hier wieder unser Hilfsgebiet, den Bereich der $\mathfrak{H}''$.

Nachdem man eine beliebig kleine, von Null verschiedene Grösse τ festgesetzt hat, kann man folgenden Satz aussprechen:

Wenn drei Punkte $\mathfrak{H}''$ ein nicht verschwindendes Dreieck $\varDelta$ bilden, in dem kein Winkel $> \pi - \tau$ ist, so lässt das diesem Dreieck entsprechende Dreieck d im Raum) sich dem Inhalt nach in der Form*

$$d = R \, . \, \varDelta (1 + e)$$

ausdrücken; dabei soll

$$R = \sqrt{(\psi_1 \chi_2 - \psi_2 \chi_1)^2 + (\chi_1 \varphi_2 - \chi_2 \varphi_1)^2 + (\varphi_1 \psi_2 - \varphi_2 \psi_1)^2}$$

sein, und e bedeute — hier und im Folgenden — irgend eine Grösse, die unter einer beliebig klein gewählten Grenze liegt für alle Dreiecke $\varDelta$ der genannten Beschaffenheit, deren Seiten kleiner sind als ein genügend klein angenommener Werth.

Wir können dabei für R den Werth der genannten Wurzelgrösse in irgend einem Punkt des Dreiecks $\varDelta$ oder seines Umfangs nehmen.

Beweis:

Derjenige Eckpunkt des Dreiecks $\varDelta$, der zum grössten Dreieckswinkel gehört (wenn zwei Winkel gleich sind, wähle man irgend welchen), werde mit u, v bezeichnet, die beiden andern mit

---

*) d. h. das von den drei entsprechenden Punkten gebildete Dreieck.

$u + \xi, v + \eta$ und $u + \bar{\xi}, v + \bar{\eta}$. Die entsprechenden Punkte im Raum seien (a, b, c), $(a + \alpha, b + \beta, c + \gamma)$, $(a + \bar{\alpha}, b + \bar{\beta}, c + \bar{\gamma})$. Setzt man noch

$$\varrho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \quad \bar{\varrho} = \sqrt{\bar{\xi}^2 + \bar{\eta}^2},$$

so ist:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \xi\varphi_1 + \eta\varphi_2 + \varrho e, \\
\beta &= \xi\psi_1 + \eta\psi_2 + \varrho e, \\
\gamma &= \xi\chi_1 + \eta\chi_2 + \varrho e;
\end{aligned}$$

ebenso:

$$\begin{aligned}
\bar{\alpha} &= \bar{\xi}\varphi_1 + \bar{\eta}\varphi_2 + \bar{\varrho} e, \\
\bar{\beta} &= \bar{\xi}\psi_1 + \bar{\eta}\psi_2 + \bar{\varrho} e, \\
\bar{\gamma} &= \bar{\xi}\chi_1 + \bar{\eta}\chi_2 + \bar{\varrho} e.
\end{aligned}$$

Die e haben die Eigenschaft, welche wir mit dieser Bezeichnung verknüpfen. Da ja u, v im Gebiet der $\mathfrak{H}''$ bleibt, kann man jedes solche e für sämmtliche u, v zugleich unter einen beliebig kleinen Werth herabmindern durch Festsetzung einer genügend kleinen Grenze für ϱ und $\bar{\varrho}$.*)

Der Inhalt der Projection von d auf die a, b-Ebene ist:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}[\alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta] = \tfrac{1}{2}[&(\xi\varphi_1 + \eta\varphi_2 + \varrho e)(\bar{\xi}\psi_1 + \bar{\eta}\psi_2 + \bar{\varrho} e) \\
&- (\bar{\xi}\varphi_1 + \bar{\eta}\varphi_2 + \bar{\varrho} e)(\xi\psi_1 + \eta\psi_2 + \varrho e)].
\end{aligned}$$

Lassen wir die Glieder von der Form $\varrho\bar{\varrho} e$, $\bar{\varrho}\xi e$, $\varrho\bar{\eta} e$, $\varrho\bar{\xi} e$ und $\bar{\varrho}\eta e$ weg, so bleibt

$$\begin{aligned}
[(\xi\varphi_1 + \eta\varphi_2)(\bar{\xi}\psi_1 + \bar{\eta}\psi_2) - (\bar{\xi}\varphi_1 + \bar{\eta}\varphi_2)(\xi\psi_1 + \eta\psi_2)] \\
= [(\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1)(\xi\bar{\eta} - \bar{\xi}\eta)].
\end{aligned}$$

Bedenkt man nun, dass

$$\left[\frac{\xi}{\varrho}\right] \leq 1, \text{ und } \left[\frac{\bar{\xi}}{\bar{\varrho}}\right] \leq 1,$$

so sieht man, dass die weggelassenen Glieder alle auf die Form $\varrho\bar{\varrho} e$ gebracht werden können. Weil ferner

$$\tfrac{1}{2}[\xi\bar{\eta} - \bar{\xi}\eta] = \Delta,$$

so erhält man:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}[\alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta] &= [\pm\Delta(\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1) + \varrho\bar{\varrho} e] \\
&= \Delta\left[\pm(\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1) + \frac{\varrho\bar{\varrho}}{\Delta} e\right].
\end{aligned}$$

---

*) S. im Anhang: Ueber das totale Differential.

Der Winkel bei u, v ist nun $\leqq \pi - \tau$ und $\geqq \frac{2\pi}{3}$ (es ist ja der grösste Dreieckswinkel); ϱ und $\bar{\varrho}$ sind die an ihm anliegenden Seiten; somit ist $\frac{\varrho \bar{\varrho}}{\Delta}$ eine Grösse, die eine feste obere und eine von Null verschiedene untere Grenze hat. Also ist aus der letzten Gleichung zu folgern, dass:

$$\tfrac{1}{4}(\alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta)^2 = \Delta^2\left((\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1)^2 + e\right),$$

indem $\varphi_1, \psi_2, \varphi_2, \psi_1$ unter endlichen Grenzen bleiben. Addirt man die letzte Gleichung zu den beiden analogen, so erhält man

$$d^2 = \Delta^2(R^2 + e).$$

Weil nun R eine von Null verschiedene untere Grenze hat, so lange u, v im Bereich der $\mathfrak{H}''$ bleibt, so kann man folgern

$$d = \Delta R(1 + e),$$

was zu beweisen war. Der Ableitung gemäss ist hier für R der Werth im Punkt u, v zu nehmen; indem aber R in einem über den Bereich $\mathfrak{H}''$ hinausgehenden Gebiet stetig und von Null verschieden ist*), sieht man leicht, dass

$$R = R_1(1 + e)$$

ist, wenn R_1 den Werth von R in u, v bedeutet und R den in einem beliebigen Punkt des Dreiecks Δ. Es ist also gleichgiltig, wo wir den Werth von R nehmen. Auf Grund des eben Entwickelten erkennt man leicht:

> *Theilt man die Ebene u, v in Dreiecke Δ, von denen keines einen Winkel $> \pi - \tau$ hat, sucht zu jedem Δ, welches ein $\mathfrak{F}$ enthält, das zugehörige d im Raum, so gibt die Flächensumme der d für unendlich kleine Dreiecksseiten einen Grenzwerth, den Inhalt der krummen Fläche, und dieser ist nichts anderes als das Integral $\iint R\,du\,dv$ über das Gebiet der $\mathfrak{F}$.*

Die Grenzpunkte $\mathfrak{G}$ wurden ja als integrirbares Punktsystem vorausgesetzt.

---

*) Man kann ja das Gebiet der $\mathfrak{H}''$ erweitern (Art. 8).

12.

Definition des Flächenpotentials; Stetigkeit.

Die Bedeutung von

$$V(x, y, z) = \int \frac{\varkappa \, dw}{r},$$

wo dw das Flächenelement, $\varkappa$ die Flächendichte in demselben, r den Abstand des Punktes x, y, z oder (x) vom Element bedeutet, bedarf nunmehr kaum einer weiteren Erörterung, wofern der Punkt (x) nicht auf der Fläche liegt, d. h. nicht zu den F gehört; der Abstand $(x) \rightarrow F$ hat ja in diesem Fall für ein constantes (x) und veränderliches F ein von Null verschiedenes Minimum. Die Theilungen sind in der u, v-Ebene auszuführen. $\varkappa$ soll als Function von u, v eine Integration im gewöhnlichen Sinne zulassen.

Dabei ist aber zu bemerken, dass alle unsere Operationen abhängig sind von der Darstellungsweise der Fläche, von den Functionen φ, ψ, χ, von der Art der Beziehung des räumlichen Punktsystems auf ein ebenes. Wir handeln hier nur von Punktsystemen, die in der angegebenen Weise auf ein ebenes System beziehbar sind, was jedoch in jedem einzelnen Fall, wo es überhaupt angeht, auf unendlich viele verschiedene Arten möglich ist. Wir haben die Punkte F in die C und die G unterschieden und der Kürze halber manchmal die Ausdrücke innere Punkte und Grenzpunkte gebraucht; diese Unterscheidung beruhte aber ganz auf der Beziehung des Punktsystems der F auf ein ebenes Continuum und seine Grenze. So wie wir unsere Definitionen gefasst haben, braucht diese Unterscheidung nicht einmal immer gleich auszufallen für dieselben Punkte F, wenn sie auf verschiedene ebene Continua bezogen werden. Man brauchte z. B. nur bei einer neuen Darstellung einen innern Punkt auszunehmen und zum Grenzpunkt zu machen; obwohl diess nun hier ohne Bedeutung wäre, so sieht man doch, dass die Definitionen anders gefasst werden müssten, wenn der Unterscheidung der F in die C und G eine Bedeutung gegeben werden sollte, die unabhängig ist von der Darstellung.

Was hier allein von Interesse ist, ist der Umstand, dass der

Flächeninhalt, die gesammte auf der Fläche ausgebreitete Masse, das Flächenintegral sich als unabhängig von der Darstellungsweise herausstellen, wie schon die vorhergehenden geometrischen Betrachtungen vermuthen lassen. Man ist berechtigt zu folgender Aufstellung:

> Man denke sich alle bis jetzt getroffenen Bestimmungen in doppelter Weise durchgeführt. Man habe eine u, v-Ebene und eine u', v'-Ebene, Punktsysteme $\mathfrak{C}, \mathfrak{L}, \mathfrak{G}, \mathfrak{F}$ in der u, v-Ebene, $\mathfrak{C}', \mathfrak{L}', \mathfrak{G}', \mathfrak{F}'$ in der u', v'-Ebene; auf diese letzteren Systeme beziehe man mit Hilfe der Functionen φ, ψ, χ, beziehungsweise φ', ψ', χ' die Punktsysteme C, L, G, F und C', L', G', F' im Raum. Alle Punktsysteme, alle Functionen durchaus mit den früher geforderten Eigenschaften. Nun sei jedes F zugleich ein F', und jedes F' zugleich ein F; dann erhält man beide Mal denselben Flächeninhalt. Ordnet man ferner jedem Punkt F oder F' des Raums eine Grösse $\varkappa$ zu, so kann $\varkappa$ sowohl als Function von u, v, als auch als Function von u', v' betrachtet werden. Wofern nun $\varkappa$ als Function von u, v betrachtet eine Integration im gewöhnlichen Sinn zulässt, so ist $\varkappa$ auch integrirbar als Function von u', v'; bezeichnet man ferner mit R' die der Grösse R entsprechende Grösse, so gilt die Gleichung
>
> $$\int\int \varkappa \,.\, f \,.\, R \; du \; dv = \int\int \varkappa \, f \,.\, R' \,.\, du' \; dv'$$
>
> für jede stetige Function f der Lage von F.

Diese Behauptungen können strenge bewiesen werden. Es möge gestattet sein, diess hier nur beiläufig zu erwähnen, um nicht den Umfang dieser Nebenuntersuchungen über alles Mass wachsen zu lassen.

Gehört der Punkt (x), in dem das Potential bestimmt werden soll, selbst zu den F, so ist das Integral $\int \frac{\varkappa \; dw}{r}$ ein uneigentliches und ist in der bekannten Weise als Grenzwerth eines Integrals über ein den Punkt (x) nicht enthaltendes Flächengebiet zu definiren. Die Existenz dieses Grenzwerths, sowie die Stetigkeit des Potentials in einem Flächenpunkt kann man durch eine bekannte Schlussweise aus der folgenden Thatsache herleiten:

Man kann um den festen Flächenpunkt F_0 herum ein kleines Gebiet so abgrenzen und die Variabilität von x, y, z auf eine so kleine Umgebung von F_0 beschränken, dass $\int \frac{\varkappa\, dw}{r}$ erstreckt über einen Theil des abgegrenzten Flächengebiets kleiner wird als eine beliebig vorher gewählte Grösse für alle x, y, z der festgesetzten Umgebung von F_0.

Dabei kann der Punkt x, y, z oder (x) auch ein Flächenpunkt sein, nur muss er dann aus dem Flächentheil, über den integrirt wird, ausgeschlossen sein.

Um diess zu beweisen, nehmen wir einen Punkt $\mathfrak{H}''$, der so beschaffen ist, dass $(x) H''$ ein Minimum wird, also $(x) \rightarrow H''$ senkrecht steht auf der Tangentialebene in H''. Es gibt ja einen solchen Punkt mindestens, wenn (x) genügend nahe bei F_0 angenommen ist. Die Coordinaten von $\mathfrak{H}''$, H'', dw seien (u, v), (a, b, c), $(a + \alpha, b + \beta, c + \gamma)$; die Coordinaten des dem Punkt dw in der u, v-Ebene entsprechenden Punktes seien $u + \xi$, $v + \eta$. Die Componenten von $x \rightarrow H''$ seien x', y', z', und die Länge

$$(x) H'' = \tau = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}.$$

Weil nun $\mathfrak{H}''$ unendlich nahe an $\mathfrak{F}_0$ (den dem F_0 entsprechenden Punkt in der u, v-Ebene) herankommt, wenn (x) dem F_0 unendlich sich nähert (s. o.), so kann man durch Beschränkung des Gebiets für dw und des Gebiets für (x) um F_0 herum erreichen, dass ξ und η eine beliebig klein vorgeschriebene Grenze nicht übersteigen, und wir können so unsere Differentialformeln benützen. Der Abstand von dw und (x) ist

$$r = \sqrt{(x' + \alpha)^2 + (y' + \beta)^2 + (z' + \gamma)^2}.$$

Nun ist aber

$$\alpha = \alpha' + \varrho e,$$

$$\beta = \beta' + \varrho e,$$

$$\gamma = \gamma' + \varrho e,$$

wo

$$\varrho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2},$$

und α', β', γ' die früher gegebene Bedeutung haben, und die e mit ξ und η in der angegebenen Weise unendlich klein werden (s. Art. 8).

Somit ist

$$r^2 = \tau^2 + 2(x'\alpha' + y'\beta' + z'\gamma') + \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2$$

abgesehen von Grössen der Form $x'\varrho e$, $y'\varrho e$, $z'\varrho e$, $\alpha'\varrho e$, $\beta'\varrho e$, $\gamma'\varrho e$, $\varrho\varrho e$.

Weil nun nach Art. 8, Gleichung I

$$\alpha' < M\varrho \text{ u. s. f.},$$

so folgt, dass die Grössen $\alpha'\varrho e$, $\beta'\varrho e$, $\gamma'\varrho e$ auf die Form $\varrho^2 e$ gebracht werden können. Die Grössen $x'\varrho e$, $y'\varrho e$, $z'\varrho e$ kann man auf die Form $\tau\varrho e$ bringen. Bedenkt man ferner, dass

$$x'\alpha' + y'\beta' + z'\gamma' = o,$$

weil die Strecken, deren Componenten x', y', z' und α', β', γ' sind, auf einander senkrecht stehen, so erhält man

$$r^2 = \tau^2 + \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 + \varrho\tau e + \varrho^2 e.$$

Wir setzten fest, dass, wenn (x) ein Flächenpunkt ist, dieser von der Integration ausgeschlossen werden solle. Wenn also $\tau = o$ ist, so ist $\xi = o$, $\eta = o$ und also auch $\alpha' = o$, $\beta' = o$, $\gamma' = o$ auszuschliessen; d. h. $\tau^2 + \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2$ ist nirgends null im Integrationsgebiet, kann aber beliebig klein werden, wenn wir x, y, z und das Integrationsgebiet variiren. Es ist also

$$r = \sqrt{\tau^2 + \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2}\left(1 + \frac{\varrho\tau + \varrho^2}{\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 + \tau^2} \cdot e\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Nach Art. 8, Gleichung I ist

$$\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 \geqq N^2\varrho^2;$$

hieraus ist leicht zu folgern, dass auch

$$\tau^2 + \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 \geqq const.\ \varrho\tau,$$

dass also $\dfrac{\varrho\tau + \varrho^2}{\tau^2 + \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2}$ stets unter einer festen Grenze bleibt. Also ist

$$r = \sqrt{\tau^2 + \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2}\,(1 + e).$$

Wir brauchen hier nur den Umstand, dass $r > const.\ \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ (Vergl. Art. 8, I). Das Integral $\displaystyle\iint\frac{\varkappa\, R\, du\, dv}{r}$ ist dasselbe wie $\displaystyle\int\frac{\varkappa\, dw}{r}$, welches wir zu untersuchen haben. $\varkappa$ und R bleiben unter endlichen Grenzen.

Also ist

$$\left[\iint^{\varkappa} \frac{R\, du\, dv}{r}\right] < const. \iint \frac{d\xi\, d\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}},\text{*)}$$

was unendlich klein wird, wenn man den Integrationsbereich auf ein unendlich kleines Gebiet in der Nähe des Nullpunkts beschränkt.

$V(x, y, z)$ ist also eine in jedem Punkt des Raums eindeutig definirte und stetige Function von x, y, z.

Das Punktsystem der F, das wir hier zu Grund gelegt haben, entspricht eigentlich nur einem Flächenstück. Das was man gewöhnlich mit einer stetigen Fläche meint, wird aus einer endlichen Anzahl von Punktsystemen, die unseren Bedingungen genügen, sich zusammensetzen lassen; Singularitäten bleiben dabei ausgeschlossen. Das Gesammtpotential ist dann auch stetig als Summe der Einzelpotentiale. Die Eigenschaften des Gesammtpotentials lassen sich aus denen der Einzelpotentiale ableiten, so dass nur diese betrachtet zu werden brauchen. So wie wir den Flächeninhalt und das Flächenintegral definirt haben, wäre freilich eigentlich erst zu zeigen, dass bei den verschiedenen möglichen Arten eine gewöhnliche Fläche in Stücke zu zerschneiden, welche den Bedingungen genügen, immer dasselbe herauskommt. So selbstverständlich diess auch scheint, dürfte doch ein strenger Beweis hiefür ziemlich schwierig und umständlich sein. Wir beschränken uns hier auf die Betrachtung des Potentials, welches herrührt von dem Punktsystem der F.

13.

Die ersten Differentialquotienten des Flächenpotentials.

Das Verhalten der Function im äusseren Raum erheischt keine neue Untersuchung; man kann in der Umgebung jedes äusseren Punkts die Function nach Potenzen entwickeln.

Wie verhalten sich nun die Differentialquotienten $\frac{dV}{dx}, \frac{dV}{dy}, \frac{dV}{dz}$, wenn wir den Punkt x, y, z oder (x) unendlich nahe an einen

*) Dieses Integral wie alle folgenden ähnlichen ist natürlich als uneigentliches aufzufassen.

Flächenpunkt F_0 herankommen lassen? Diese Frage findet man sonst nur für den Fall beantwortet, dass (x) sich auf der in F_0 errichteten Normale bewegt.

Der Punkt F_0 und der zugehörige Punkt $\mathfrak{F}_0$ sei fest. Wir fixiren ferner eine positive Grösse σ, so klein als wir wollen. Nun kann man (vergleiche Art. 9) für den Punkt (x) eine solche Umgebung von F_0 vorschreiben, dass (x), so lange es in dieser Umgebung bleibt, immer von den Flächenpunkten und von den Punkten der nächsten Fortsetzung der Fläche (den H'') verschieden ist, wofern die Veränderlichkeit von (x) ausserdem noch der beschränkenden Bedingung unterworfen ist, dass $(x) \to F_0$ mit der Tangentialebene in F_0 einen Winkel $> \sigma$ macht. Dann haben $\frac{dV}{dx}, \frac{dV}{dy}, \frac{dV}{dz}$ in (x) stets eine Bedeutung. Sind ferner u_0, v_0 die Coordinaten von $\mathfrak{F}_0$, und a_0, b_0, c_0 die von F_0, ferner $a_0 + \alpha$, $b_0 + \beta$, $c_0 + \gamma$ die von dw, und $u_0 + \xi$, $v_0 + \eta$ die des dem dw in der u, v-Ebene entsprechenden Punkts, so ist

$$\frac{dV}{dx} = \int \frac{\varkappa\,(a_0 + \alpha - x)}{r^3}\,dw = \iint \frac{\varkappa\,(a_0 + \alpha - x)}{r^3}\,R\,d\xi\,d\eta;$$

u_0, v_0, a_0, b_0, c_0 sind fest; $\xi, \eta, \alpha, \beta, \gamma$ sind variabel.

Wir müssen nun über die Dichte und über die Fläche neue Voraussetzungen einführen: Wir bezeichnen mit $\varkappa_0$ die Dichte in F_0, mit d den Abstand des veränderlichen Flächenpunkts F oder dw von F_0.

Nun sollen zwei positive constante Werthe A und μ existiren, so dass

$$[\varkappa - \varkappa_0] < A d^\mu$$

für alle F in der Nähe von F_0.

Weil nun mit FF_0 auch $\mathfrak{F}\mathfrak{F}_0 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \varrho$ unendlich klein wird (s. o.), und somit für genügend kleine FF_0 oder d der Werth $\frac{d}{\varrho} = \frac{FF_0}{\mathfrak{F}\mathfrak{F}_0}$ endlich und über einer von Null verschiedenen Grenze bleibt (Vergl. Art. 8 und 9), so wird auch

$$[\varkappa - \varkappa_0] < const.\ \varrho^\mu$$

sein für alle F in einer gewissen Umgebung von F_0.

Für die Fläche stellen wir folgende Bedingung auf:

Es soll eine Darstellung derselben existiren von der Beschaffenheit, dass $[g(u_0 + \xi, v_0 + \eta) - g(u_0, v_0)] < \bar{A} \varrho^{\bar{\mu}}$ *für alle* ξ, η *unter einer gewissen Grenze, wobei wieder* $\bar{A}$ *und* $\bar{\mu}$ *constant sind, und* g *jede der sechs Functionen* $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2, \chi_1, \chi_2$ *bedeutet.*

Hiebei ist zu bemerken, dass, wenn F_0 d. h. also $\mathfrak{F}_0$ in der Grenze liegt, was nicht ausgeschlossen sein soll, die Bedingung für die φ_1, φ_2 u. s. f. sich auf alle ξ, η von einer gewissen Kleinheit, also auch auf die Fortsetzung der Fläche erstreckt; die Bedingung für $\varkappa$ soll erfüllt sein durch alle ξ, η, für welche $u_0 + \xi$, $v_0 + \eta$ ein Punkt $\mathfrak{F}$ ist.

Grössen, die in dieser Weise, wie eine positive Potenz von ϱ unendlich klein werden, bezeichnen wir mit ε. Im Folgenden kommen Grössen ε vor, die nicht nur von ξ, η, sondern auch von (x) abhängen; in diesem Fall meinen wir Grössen, die für alle ξ, η von einer gewissen Kleinheit und für alle (x) eines gewissen Bereichs um F_0 herum kleiner sind als $\bar{A} \varrho^{\bar{\mu}}$, wo $\bar{A}$ und $\bar{\mu}$ von ξ, η und von (x) unabhängig sind.

Nun gilt*)

$$\varphi(u_0 + \xi, v_0 + \eta) - \varphi(u_0, v_0)$$
$$= \xi \varphi_1(u_0, v_0) + \eta \varphi_2(u_0, v_0) + \varrho \varepsilon,$$

entsprechend für ψ und χ. In den in Art. 8 angewandten Bezeichnungen heisst diess:

$$\alpha = \alpha' + \varrho \varepsilon,$$
$$\beta = \beta' + \varrho \varepsilon,$$
$$\gamma = \gamma' + \varrho \varepsilon.$$

Man bezeichne nun mit x', y', z' die Componenten und mit τ die Länge von $x \rightarrow F_0$, so ist

$$r = \sqrt{(x' + \alpha)^2 + (y' + \beta)^2 + (z' + \gamma)^2}$$
$$= \sqrt{\tau^2 + \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 + 2(x'\alpha' + y'\beta' + z'\gamma') + \varrho\tau\varepsilon + \varrho^2\varepsilon},$$

ähnlich wie im vorigen Artikel, nur dass hier ε steht statt e, und dass nun $x'\alpha' + y'\beta' + z'\gamma'$ nicht null ist.

*) Vergl. den Anhang.

Die Grösse $\frac{x'\alpha' + y'\beta' + z'\gamma'}{\tau \,.\, \sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2}}$ ist der *cos.* des Winkels der Strecken mit den Componenten x', y', z' und α', β', γ'. Die letzte Strecke liegt in der Tangentialebene, und der Winkel bleibt also stets um ein Endliches von o und π verschieden. Also ist

$$\frac{[x'\alpha' + y'\beta' + z'\gamma']}{\tau \,.\, \sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2}} < 1 - \delta,$$

wo δ eine feste positive Grösse bedeutet.

τ ist nie null, denn wir nehmen stets (x) von F_0 verschieden an. Die letzte Ungleichung wird also nur illusorisch, wenn $\alpha' = o$, $\beta' = o$, $\gamma' = o$; in diesem Fall bleibt sie aber in der Form

$$[x'\alpha' + y'\beta' + z'\gamma'] \leqq (1 - \delta)\, \tau \sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2}$$

bestehen. Wir haben ausserdem die für beliebige Grössen giltige Relation

$$\tau^2 + \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 \geqq 2\, \tau \sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2}.$$

Multiplicirt man die letzte Ungleichung mit $(1 - \delta)$ und zieht man die mit 2 multiplicirte vorletzte Ungleichung davon ab, so kommt:

$$(1 - \delta)(\tau^2 + \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2) - 2\,[x'\alpha' + y'\beta' + z'\gamma'] \geqq o;$$

umsomehr ist

$$(1 - \delta)(\tau^2 + \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2) + 2\,(x'\alpha' + y'\beta' + z'\gamma') \geqq o.$$

Also

$$\tau^2 + \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 + 2\,(x'\alpha' + y'\beta' + z'\gamma') \geqq \delta\,(\tau^2 + \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2)$$

und also auch $\qquad > const.\,(\tau^2 + \varrho^2)$,

wo *const.* von Null verschieden ist.

Setzt man für den Augenblick

$$\tau^2 + \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 + 2\,(x'\alpha' + y'\beta' + z'\gamma') = W,$$

so ist W von Null verschieden und $> const.\,(\tau^2 + \varrho^2)$;

ferner
$$r = \sqrt{W + \varrho\tau\varepsilon + \varrho^2\varepsilon},$$

also
$$r = \sqrt{W}\left(1 + \frac{\varrho\tau + \varrho^2}{W}\,\varepsilon\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \sqrt{W}(1 + \varepsilon),$$

da $\frac{\varrho\tau + \varrho^2}{W}$ unter einer endlichen Grenze bleibt.

Wir erhalten also:

$$r = \sqrt{\tau^2 + \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 + 2(x'\alpha' + y'\beta' + z'\gamma')}\ (1 + \varepsilon)$$
$$= \sqrt{(x' + \alpha')^2 + (y' + \beta')^2 + (z' + \gamma')^2}\ (1 + \varepsilon).$$

Ausserdem ist

$$\varkappa = \varkappa_0 + \varepsilon \text{ (s. o.)},$$

und

$$R = R_0 + \varepsilon,$$

wenn R_0 den Werth von R in u_0, v_0 bedeutet; die letzte Gleichung folgt aus dem Verhalten der $\varphi_1, \varphi_2 \dots$.

Aus diesen Relationen und aus

$$\alpha = \alpha' + \varrho\varepsilon \text{ und } W > const. (\tau^2 + \varrho^2)$$

ist nun leicht zu folgern:

$$\iint \frac{\varkappa(a_0 + \alpha - x)}{r^3} R\, d\xi\, d\eta$$

und $\varkappa_0 R_0 \iint \frac{(a_0 + \alpha' - x)\, d\xi\, d\eta}{(\sqrt{(x' + \alpha')^2 + (y' + \beta')^2 + (z' + \gamma')^2})^3}$

sind für alle der genannten Bedingung genügenden (x) *unendlich wenig von einander verschieden, wenn das Gebiet der* ξ, η, *worüber wir integriren, unendlich klein genommen wird;*

die weggelassenen Grössen sind

$$< const. \iint \frac{d\xi\, d\eta}{(\sqrt{\xi^2 + \eta^2})^{2-\mu}}$$

erstreckt über ein unendlich kleines Gebiet um $\xi = o$, $\eta = o$ herum.

Das Integral $\varkappa_0 R_0 \iint \frac{(a_0 + \alpha' - x)\, d\xi\, d\eta}{(\sqrt{(x' + \alpha')^2 + (y' + \beta')^2 + (z' + \gamma')^2})^3}$ kann gedacht werden als herrührend von der gleichförmig mit der Dichte $\varkappa_0$ belegten Tangentialebene, und zwar ist das Stück derselben zu nehmen, welches gegeben ist durch die Gesammtheit der Punkte $a_0 + \alpha'$, $b_0 + \beta'$, $c_0 + \gamma'$; dabei sind diese letzteren Punkte bestimmt durch

$$\alpha' = \xi\varphi_1(u_0, v_0) + \eta\varphi_2(u_0, v_0),$$
$$\beta' = \xi\psi_1(u_0, v_0) + \eta\psi_2(u_0, v_0),$$
$$\gamma' = \xi\chi_1(u_0, v_0) + \eta\chi_2(u_0, v_0),$$

wobei alle ξ, η zu nehmen sind, wofür $u_0 + \xi$, $v_0 + \eta$ ein Punkt $\mathfrak{F}$

des Integrationsgebiets von $\iint \frac{\varkappa(a_0 + \alpha - x)}{r^3} R\, d\xi\, d\eta$ ist, welches wir unendlich klein aus dem ganzen Gebiet der $\mathfrak{F}$ herausschneiden.

14.

Fortsetzung.

Annäherung an einen inneren Punkt.

Wir wollen zunächst annehmen, $\mathfrak{F}_0$ sei ein innerer Punkt, also ein Punkt $\mathfrak{C}$. Man kann nun folgenden Schluss machen. Man denke sich ein endliches Stück der Tangentialebene in F_0 abgegrenzt, für welches F_0 ein innerer Punkt ist. Dieses Stück sei mit Masse von der gleichförmigen Dichte $\varkappa_0$ belegt, und $\overline{V}$ sei ihr Potential. Dann wird, wenn (x) der früheren Bedingung in Beziehung auf die Tangentialebene genügt, durch Beschränkung von (x) auf eine gewisse Umgebung von F_0 die Differenz $\frac{dV}{dx} - \frac{d\overline{V}}{dx}$ so klein gemacht werden können, als man will. Es nähert sich also auch $\frac{dV}{dx} - \frac{d\overline{V}}{dx}$ einem bestimmten Grenzwerth, wenn man (x) auf irgend einer festen geraden Linie dem Punkt F_0 sich nähern lässt, wofern diese Linie mit der Tangentialebene einen Winkel $> \tau$ macht; und zwar ist dieser Grenzwerth derselbe für alle diese geraden Linien. Da aber τ ursprünglich so klein angenommen werden konnte, als man wollte, so erhält man denselben Grenzwerth für jede besondere Gerade, die nicht in der Tangentialebene liegt. Dasselbe gilt von $\frac{dV}{dy}$ und $\frac{dV}{dz}$, also auch von $\frac{dV}{dt}$, weil die Gleichung

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} \cos(t, x) + \frac{dV}{dy} \cos(t, y) + \frac{dV}{dz} \cos(t, z)$$

in (x) gilt, welches bei der Annäherung immer ein äusserer Punkt bleibt. Wir haben damit das Problem auf den Fall einer ebenen Fläche reducirt, bei der wir überdiess die Randkurve beliebig wählen dürfen. Dieser Fall ist leicht zu erledigen durch Verwandlung des Integrals in ein Randintegral;*) oder man ver-

*) S. Clausius, 3. Aufl. §. 28 und §. 29.

gleicht ihn auf die eben angegebene Art mit dem Fall der Kugel. *) Unterscheidet man also eine positive und eine negative Normale und bezeichnet man den Grenzwerth von $\frac{dV}{dt}$ bei der Annäherung auf einer nicht in der Tangentialebene liegenden Geraden t' mit $\left(\frac{dV}{dt}\right)_+$ und $\left(\frac{dV}{dt}\right)_-$, je nachdem t' mit der positiven Normale einen spitzen oder stumpfen Winkel bildet, so ist

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_+ - \left(\frac{dV}{dt}\right)_- = -4\pi\varkappa_0 \cos\lambda,$$

wo λ den Winkel der positiven Normale mit $+t$ bedeutet.

Aus der Annäherung von $\frac{dV}{dt}$ an einen bestimmten Grenzwerth auf der Normale n kann kein Schluss gezogen werden auf die Existenz des Differentialquotienten $\frac{dV}{dt}$ *im Punkt* F_0 *selbst*, wohl aber aus der Existenz eines Grenzwerths von $\frac{dV}{dt}$ bei der Annäherung an F_0 auf einer aus F_0 in der Richtung $+t$ selbst gezogenen Geraden. Bedeutet also t' eine nicht der Tangentialebene parallele Richtung, und t'' die entgegengesetzte, so hat man in F_0 selbst einseitige Differentialquotienten, und es ist

$$\frac{dV}{dt'} + \frac{dV}{dt''} = -4\pi\varkappa_0 \cos\nu,$$

wo ν den spitzen Winkel der Normale mit t' oder t'' bedeuten soll.

15.

Verhalten in unendlicher Nähe des Flächenrands.

Dieselben Betrachtungen gelten, wenn $\mathfrak{F}_0$ ein Punkt $\mathfrak{G}$, ein Punkt der Grenze des in der u, v-Ebene definirten Continuums ist. Wir vergleichen auch in diesem Fall das Potential V mit dem Potential $\overline{V}$, das herrührt von einem mit gleichförmiger

*) Diese Betrachtung führt Herr C. Neumann in seinen „Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential“ an als „einfachste, doch nicht strenge“ Art der Herleitung des bekannten Satzes für das Flächenpotential. Durch diese Untersuchungen wird die Betrachtungsweise zu einer strengen gemacht.

Dichte belegten Theil der Tangentialebene. Dieses letztere Gebiet können wir z. B. dadurch bestimmen, dass wir zu sämmtlichen Punkten $u_0 + \xi$, $v_0 + \eta$, welche zu den $\mathfrak{F}$ gehören, uns die zugehörigen Punkte $a_0 + \alpha'$, $b_0 + \beta'$, $c_0 + \gamma'$ der Tangentialebene denken, welche durch sie mittelst der Gleichungen

$$\alpha' = \xi\varphi_1 + \eta\varphi_2 \quad \text{u. s. f.}$$

gegeben sind.

Wir machen nun über die Beschaffenheit des Bereichs der $\mathfrak{F}$ im Grenzpunkt $\mathfrak{F}_0$ eine neue Voraussetzung:

Es existire in der u, v-Ebene eine feste, durch $\mathfrak{F}_0$ gehende Gerade s, deren positive und negative Seite irgendwie unterschieden werden möge.

> *Nun sollen alle Punkte $u_0 + \xi$, $v_0 + \eta$, die in einer gewissen Umgebung von $\mathfrak{F}_0$ liegen, und deren Abstand von s grösser ist als $A\varrho^{1+\mu}$, zu den $\mathfrak{F}$ gehören oder nicht, je nachdem sie auf der positiven oder negativen Seite von s sind.*

Dabei sind A und μ zwei Constante (nicht gerade dieselben wie oben), beide positiv. Betrachtet man nun das frühere Integral $\varkappa_0 R_0 \iint \frac{(a_0 + \alpha' - x)\, d\xi\, d\eta}{(\sqrt{(x' + \alpha')^2 + (y' + \beta')^2 + (z' + \gamma')^2})^3}$ (im vorigen Artikel), erstreckt über einen unendlich kleinen Theil des Gebiets $\mathfrak{F}$, etwa über den, der ausgeschnitten wird durch einen um $\mathfrak{F}_0$ beschriebenen unendlich kleinen Kreis in der u, v-Ebene, so ist leicht zu sehen, dass diess unendlich wenig verschieden ist — für alle (x) — von demselben Integral über die auf der positiven Seite von s liegende Hälfte des genannten Kreises. Die vernachlässigten Grössen sind $< const. \iint \frac{d\xi\, d\eta}{\xi^2 + \eta^2}$, erstreckt über einen Theil der ξ, η-Ebene, der begrenzt ist durch einen unendlich kleinen Kreisbogen, die ξ-Axe und die Curve $\eta = const.\, \xi^{1+\mu}$; diess ist offenbar unendlich klein.

Man wiederholt nun die früheren Schlüsse. Der Geraden s entspricht eine Gerade in der Tangentialebene. Wenn also eine Darstellung unserer Fläche existirt, die beiden Bedingungen genügt, der früheren und der neuen in $\mathfrak{F}_0$, so kann das Potential V mit dem Potential V eines gleichförmig mit Masse belegten,

in F_0 geradlinig begrenzten Stücks der Tangentialebene verglichen werden. $\frac{dV}{dt} - \frac{d\overline{V}}{dt}$ nähert sich auf jeder besonderen, nicht in der Tangentialebene liegenden festen Geraden t' einem bestimmten Grenzwerth, und zwar immer demselben.

16.

Durchführung der Untersuchung für die Ebene.

Um nun den besonderen Fall zu erledigen, auf welchen wir den allgemeinen reducirt haben, denken wir uns der Einfachheit halber ein halbkreisförmiges Stück der x, y-Ebene mit Masse von der Dichte $\varkappa_0$ gleichförmig belegt. Die Punkte x, y, wofür

$$x^2 + y^2 \leqq \mathfrak{r}^2, \quad x \geqq o, \quad z = o,$$

bilden unser Gebiet.

Wie ändern sich die ersten Differentialquotienten des von diesem Ebenenstück herrührenden Potentials, wenn man unendlich nahe an den Punkt o, o, o herankommt?

Sei zunächst der Punkt (x) in der y, z-Ebene, nahe am Nullpunkt, so ist*)

$$V(x, y, z) = -\pi \varkappa_0 [z] + \varkappa_0 \int \frac{R}{U} i\, ds,$$

wo U den Abstand der Projection (p) von (x) auf die x, y-Ebene vom Element ds des Kreisbogens, i den cos des Winkels von $ds \longrightarrow (p)$ mit der nach Innen gerichteten Normale in ds, R den Abstand von (x) und ds bedeutet; die Integration erstreckt sich nur über den Kreisbogen ((p) fällt ja hier auf die y-Axe).

Man findet diesen Ausdruck, indem man (p) zum Mittelpunkt von Polarcoordinaten u, φ macht und in

$$V = \varkappa_0 \iint \frac{u\, du\, d\varphi}{\sqrt{u^2 + z^2}}$$

zuerst nach u integrirt.

---

*) Diese Umformungen finden sich in dem Lehrbuch von Herrn Clausius, von dem wir auch hier die Bezeichnungen entlehnt haben. Vergl. Clausius, §. 28.

Wir denken uns (x) ausserhalb der Massen, d. h. z sei nicht o; die Grösse $\frac{dV}{d\tau}$, wo τ eine in der y, z-Ebene liegende Richtung bedeuten möge, nähert sich offenbar einer Grenze, wenn man von einer Seite her an den Punkt o, o, o unendlich nahe herankommt. Wir nennen diese Grenze $\left(\frac{dV}{d\tau}\right)_+$ beziehungsweise $\left(\frac{dV}{d\tau}\right)_-$, je nachdem wir von den $+z$ oder von den $-z$ herkommen. Dann ist

$$\left(\frac{dV}{d\tau}\right)_+ - \left(\frac{dV}{d\tau}\right)_- = -2\pi\varkappa_0 \cos\lambda,$$

wenn λ der Winkel von τ mit $+z$ ist. Im Nullpunkt selbst sind in der y, z-Ebene Differentialquotienten nach allen Richtungen vorhanden; ist τ' die dem τ entgegengesetzte Richtung, so ist im Nullpunkt

$$\frac{dV}{d\tau} + \frac{dV}{d\tau'} = -2\pi\varkappa_0 \cos\nu,$$

wo ν den spitzen Winkel von τ oder τ' mit der z-Axe bedeutet.

Wir lassen jetzt die Beschränkung fallen, dass (x) in der y, z-Ebene liege. Nun ist, da (x) ausserhalb der Massen liegt,

$$\frac{dV}{dx} = \varkappa_0 \int \frac{\alpha'}{R}\, ds,$$

$$\frac{dV}{dy} = \varkappa_0 \int \frac{\beta'}{R}\, ds.$$

Hier ist die Integration über den ganzen Umfang der Figur auszudehnen; α' und β' bedeuten die $\cos$ der Winkel der $+x$- und der $+y$-Axe mit der nach Innen gerichteten Normale auf ds. Diese Formeln findet man im Lehrbuch von Herrn Clausius*) abgeleitet. Einfacher beweisst man sie dadurch,**) dass man z. B. $\frac{dV}{dx} = \varkappa_0 \int\int \frac{a\, da\, db}{(\sqrt{a^2 + b^2 + z^2})^3}$ setzt, indem man für den Augenblick den Fusspunkt (p) des von (x) auf die x, y-Ebene gefällten Loths zum Mittelpunkt der a, b macht; integrirt man nun zuerst

*) Vergl. Clausius, §. 29.

**) Vergl. Gauss, Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum etc. theorema 3.

nach a und verwandelt dann das Element db in ds, so kommt die Formel.

In

$$\frac{dV}{dy} = \varkappa_0 \int \frac{\beta'}{R}\, ds$$

ist auf der y-Axe $\beta' = o$. Es bleibt also nur ein Integral über die Halbkreislinie. Also:

$\frac{dV}{dy}$ *nähert sich einer bestimmten Grenze, wie man auch an den Nullpunkt herankommt.*

Das andere Integral

$$\frac{dV}{dx} = \varkappa_0 \int \frac{\alpha'}{R}\, ds$$

zerlegen wir in zwei Theile. Der Theil, der erstreckt ist über die Halbkreislinie, ändert sich stetig; im andern Theil ist $\alpha' = 1$.

Der letztere Theil gibt $\varkappa_0 \int\limits_{-\mathfrak{r}-\mathfrak{y}}^{+\mathfrak{r}-\mathfrak{y}} \frac{d\sigma}{\sqrt{h^2 + \sigma^2}}$, wie man leicht sieht, wenn man die Bogenlänge σ von der Projection (q) von (x) auf die y-Axe an rechnet; dabei ist $h = \sqrt{x^2 + z^2}$, der Abstand des Punkts (x) von der y-Axe. Nun unterscheidet sich $\varkappa_0 \int\limits_{-\mathfrak{r}-\mathfrak{y}}^{+\mathfrak{r}-\mathfrak{y}} \frac{d\sigma}{\sqrt{h^2 + \sigma^2}}$ für unendlich kleine x, y, z unendlich wenig von

$$\varkappa_0 \int\limits_{-\mathfrak{r}}^{+\mathfrak{r}} \frac{d\sigma}{\sqrt{h^2 + \sigma^2}} = 2\,\varkappa_0 \int\limits_{o}^{+\mathfrak{r}} \frac{d\sigma}{\sqrt{h^2 + \sigma^2}}$$

$$= 2\,\varkappa_0 \left\{ log.\, (\mathfrak{r} + \sqrt{h^2 + \mathfrak{r}^2}) - log.\, h \right\},$$

und dieses ist unendlich wenig verschieden von $2\,\varkappa_0 \{ log.\, (2\,\mathfrak{r}) - log.\, h \}$.

$\frac{dV}{dx} + 2\,\varkappa_0\, log.\, h$ *nähert sich demgemäss einer festen Grenze, wenn* (x) *dem Nullpunkt unendlich nahe kommt.*

Für $\frac{dV}{dz}$ endlich haben wir die folgenden Formeln I, II, III zu benützen, je nachdem (p) in die Fläche, auf die y-Axe, oder ausserhalb fällt (d. h. $x > o, = o,$ oder $< o$):

$$\text{I}\quad \frac{dV}{dz} = -2\pi\varkappa_0 \frac{z}{[z]} + \varkappa_0 z \int \frac{i}{RU}\, ds,$$

$$\text{II}\quad \frac{dV}{dz} = -\pi\varkappa_0 \frac{z}{[z]} + \varkappa_0 z \int \frac{i}{RU}\, ds,$$

$$\text{III}\quad \frac{dV}{dz} = \varkappa z_0 \int \frac{i}{RU}\, ds;$$

R, U, i wie oben. In Gleichung II hat man nur über den Halb kreisbogen zu integriren, in I und III über den ganzen Umfang. Indem die Theile der Integrale $\int \frac{i}{RU}\, ds$, die über den Halbkreis erstreckt sind, endlich bleiben, verschwinden sie mit z multiplicirt an der Grenze $x = o$, $y = o$, $z = o$.

Im Fall II kommt also $\mp \pi \varkappa_0$ als Grenzwerth, je nachdem man von $+z$ oder $-z$ herkommt.

Um die Fälle I und III beurtheilen zu können, ist $\int \frac{i}{RU}\, ds$ über die y-Axe von $-\mathfrak{r}$ bis $+\mathfrak{r}$ zu betrachten. Rechnet man die Bogenlänge σ wieder von der Projection (q) von (x) auf die y-Axe aus, so ist*)

$$i = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \sigma^2}},$$

$$U = \sqrt{x^2 + \sigma^2},$$

$$R = \sqrt{x^2 + z^2 + \sigma^2}$$

in beiden Fällen, I und III. Das zu bestimmende Integral wird daher unendlich wenig von $\varkappa_0\, z \int_{-\mathfrak{r}}^{+\mathfrak{r}} \frac{x\, d\sigma}{(x^2 + \sigma^2)\sqrt{x^2 + z^2 + \sigma^2}}$ verschieden für unendlich kleine x, y, z.

Angenommen nun, wir nähern uns dem Nullpunkt auf einer festen Geraden, die nicht in der y, z- und nicht in der x, y-Ebene liegt, so ist $z = cx$, wobei c von Null verschieden ist. Führt man in dem obigen Integral die Substitution

$$\sigma = [x]\, \sigma'$$

aus, so wird:

---

*) Die Vorzeichen der Quadratwurzeln sind hier stets pos. zu nehmen; dann sind die Gleichungen auch zeichenrichtig.

$$\varkappa_0\, z \int_{-\mathfrak{r}}^{+\mathfrak{r}} \frac{x\, d\sigma}{(x^2+\sigma^2)\sqrt{x^2+z^2+\sigma^2}} = 2\varkappa_0\, zx \int_o^{\mathfrak{r}} \frac{d\sigma}{(x^2+\sigma^2)\sqrt{x^2+z^2+\sigma^2}}$$

$$= 2\,\varkappa_0\, c \int_o^{\frac{\mathfrak{r}}{[x]}} \frac{d\sigma'}{(1+\sigma'^2)\sqrt{1+c^2+\sigma'^2}}\,.$$

Diess hängt nur noch von $[x]$ ab; wenn letzteres unendlich klein wird erhält man

$$2\,\varkappa_0\, c \int_o^{\infty} \frac{d\sigma}{(1+\sigma^2)\sqrt{1+c^2+\sigma^2}}\,.$$

Die Substitution

$$\sigma = \sqrt{1+c^2}\; tg\; \varphi,$$

wo φ von $o \ldots . \frac{\pi}{2}$ geht, gibt

$$2\,\varkappa_0\, c \int_o^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\varphi\;\; d\varphi}{1+c^2\; \sin^2\varphi}\,;$$

mit

$$\sin\varphi = y$$

kommt endlich

$$2\,\varkappa_0 \int_o^1 \frac{c\, dy}{1+c^2y^2} = 2\,\varkappa_0\; arctg.\, c,$$

wobei der zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegende *arctg.* zu nehmen ist.

Seit t' der durch den Nullpunkt gezogene, nicht in der x, y-Ebene liegende Strahl, auf dem wir uns bewegen (in der Richtung $-t'$). Dreht man nun diejenige Hälfte der x, y-Ebene, wo $x > o$ ist, um die y-Axe, und zwar zuerst durch den Quadranten, wo $z > o$, $x > o$, dann durch den, wo $z > o$, $x < o$ u. s. f., so möge φ der Winkel sein, um den man drehen muss, bis die gedrehte Halbebene den Strahl t' in sich aufnimmt.

Nun folgt leicht aus den obigen Gleichungen I, II, III und

aus dem berechneten Grenzwerth des Integrals durch Discussion der einzelnen Fälle das Resultat, dass

$\frac{dV}{dz}$ *auf der Linie* t' *sich dem Werth* $-2\pi\varkappa_0 + 2\varkappa_0\varphi$ *nähert.*

Aus den Grenzwerthen von $\frac{dV}{dx}, \frac{dV}{dy}, \frac{dV}{dz}$ folgt vermöge der Gleichung

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} \cos(t, x) + \frac{dV}{dy} \cos(t, y) + \frac{dV}{dz} \cos(t, z)$$

der Grenzwerth von $\frac{dV}{dt}$.

17.

Das allgemeine Resultat.

Gesetzt, die Fläche genüge allen früher geforderten Bedingungen, ebenso $\varkappa$, so gilt Folgendes:

Wenn man den zu untersuchenden Randpunkt F_0 zum Ursprung des Coordinatensystems macht, die Flächennormale zur z-Axe, die Randtangente zur y-Axe, die Flächentangente, die normal auf dem Rand steht, zur x-Axe, die positive x-Axe nach dem Innern der Fläche, die positive y- und z-Axe beliebig nimmt, so haben

$$\frac{dV}{dx} + 2\varkappa_0 \log h, \ \frac{dV}{dy}, \ \frac{dV}{dz}$$

bestimmte Grenzwerthe, wenn (x) sich dem Nullpunkt auf der Normale von der Seite der positiven z her nähert; dabei ist

$$h = \sqrt{x^2 + z^2}.$$

Wir nennen diese Grenzwerthe X_0, Y_0, Z_0.

Nun bedeute t eine beliebige Richtung, die mit der x-, y-, z-Axe die Richtungscosinusse $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ bildet, und t' eine nicht in der x,y-Ebene liegende Richtung, zu welcher ein Winkel φ in der früher angegebenen Weise gehört.

Dann nähert sich

$$\frac{dV}{dt} + 2\varkappa_0 . \cos A . \log h$$

auf der Linie t' (d. h. wenn (x) in der Richtung — t' auf den Ursprung zukommt) dem Grenzwerth

$$X_0 \cos A + Y_0 \cos B + (Z_0 - \varkappa_0 \pi + 2 \varkappa_0 \varphi) \cos C.$$

Bedeutet τ eine *der y, z-Ebene parallele* Richtung, so nähert sich $\frac{dV}{d\tau}$ auf jeder Linie t' einem festen endlichen Grenzwerth, *der aber für verschiedene solche Linien t' verschieden ist,* indem er sich mit φ ändert. Ist τ zugleich eine Richtung t', und τ' die dem τ entgegengesetzte Richtung, so existiren also *im Nullpunkt* einseitige Differentialquotienten $\frac{dV}{d\tau}$ und $\frac{dV}{d\tau'}$, und es ist:

$$\frac{dV}{d\tau} + \frac{dV}{d\tau'} = -2 \varkappa_0 \pi \cos \nu,$$

wo ν den spitzen Winkel von z mit τ oder τ' bedeutet.

Nach Richtungen, die der y, z-Ebene nicht parallel sind, existiren im Nullpunkt keine endlichen Differentialquotienten. Der Differentialquotient $\frac{dV}{dt}$ wird in diesem Fall bei der Annäherung an F_0 auf jeder Linie t' unendlich gross, und zwar mit dem Zeichen von $\varkappa_0$ oder dem entgegengesetzten, je nachdem die Componente von $+t$ nach der $+x$-Axe positiv oder negativ ist.

Das Resultat für einen inneren Flächenpunkt lässt sich aus diesem Resultat ableiten durch Zusammensetzen der Fläche aus zwei Stücken.

Dritter Abschnitt.

Potential einer Masse auf sich selbst.

18.

Das Potential einer Masse auf sich selbst als Grenzwerth einer Summe; Nachweis der Existenz dieses Grenzwerths.

Wir machen nun über die Function $\varkappa$ von a, b, c genau dieselben Voraussetzungen wie im ersten Artikel. $d\tau$ sei das Raumelement in a, b, c,

$$r = \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2},$$
$$V(x, y, z) = \int \frac{\varkappa\, d\tau}{r}.$$

Dann ist

$$\tfrac{1}{2}\int \varkappa\, V(a, b, c)\, d\tau = \overline{\int\int} \frac{\varkappa\, \varkappa'\, d\tau\, d\tau'}{\varrho}\ {}^{*)}$$

die Grösse, welche man das Potential der Masse auf sich selbst nennt, wenn man $\varkappa$ als Dichte einer Massenvertheilung betrachtet. Dabei bedeutet im letzten Integral ϱ den Abstand der beiden Elemente $d\tau$ und $d\tau'$, $\varkappa$ und $\varkappa'$ die Dichte in $d\tau$ beziehungsweise $d\tau'$, und die Integration ist über das ganze Gebiet zu erstrecken, jede Combination zweier Elemente einmal genommen.

---

*) Man versteht auch manchmal unter dem Ausdruck „Potential einer Masse auf sich selbst“ das Doppelte dieser Grösse. Wir meinen hier kein gewöhnliches Integral (s. u.), insbesondere keine zweimalige successive Integration. Sollte das Integral im letzteren Sinn verstanden werden, so wäre der Coefficient $\frac{1}{2}$ in der Gleichung zu streichen, man hätte aber bloss eine tautologische Gleichung.

Das letzte Integral bedarf noch einer Erläuterung. Auf der Auffassung desselben als Grenze einer endlichen Combinationssumme werden zum Theil unsere späteren Entwicklungen beruhen. Theilt man den ganzen Bereich in kleine Gebiete, so sieht man gleich, dass für zwei aneinander liegende Gebietstheile ϱ nicht aufgefasst werden darf als Abstand zweier beliebigen Punkte des einen und des andern; sonst könnte man das Integral so gross machen, als man wollte. Wir müssen also noch eine beschränkende Verfügung treffen, um den Begriff dieser Grösse feststellen und ihre Existenz beweisen zu können.

Wir wollen uns hier auf eine ganz specielle Art der Integration beschränken, indem diess für die von uns zu ziehenden Folgerungen genügen wird. Wir theilen den ganzen Bereich durch drei Systeme von Ebenen parallel der y, z-Ebene, z, x-Ebene und x, y-Ebene in gleichen Abständen. l sei der Abstand zweier aufeinanderfolgenden Ebenen in allen drei Systemen. $\varDelta\tau$ sei irgend einer der so entstehenden cubischen Gebietstheile. Nun bilde man $\sum \frac{\varDelta\tau \,.\, \varDelta\tau' \,.\, \varkappa \,.\, \varkappa'}{\varrho}$ erstreckt über alle Combinationen $\varDelta\tau$, $\varDelta\tau'$ zweier verschiedenen Gebietstheile, jede Combination einmal genommen. $\varkappa$, beziehungsweise $\varkappa'$, sei die Dichte in irgend einem Punkt von $\varDelta\tau$, oder $\varDelta\tau'$; ϱ sei der Abstand der Mittelpunkte von $\varDelta\tau$ und $\varDelta\tau'$. Jetzt soll gezeigt werden, dass die genannte Summe für unendlich kleine l eine Grenze besitzt, und dass diese Grenze gleich $\frac{1}{2}\int V \,.\, \varkappa \,.\, d\tau$ ist.

Beweis:

Wir trennen von $\sum \frac{\varDelta\tau \,.\, \varDelta\tau' \, \varkappa \, \varkappa'}{\varrho}$ die Theile ab, welche mit einem bestimmten $\varDelta\tau$ multiplicirt sind, also: $\varkappa \, \varDelta\tau \sum \frac{\varDelta\tau' \,.\, \varkappa'}{\varrho}$; hier erstreckt sich die Summation auf alle Gebiete ausser $\varDelta\tau$ selbst. Ferner beschreiben wir um den Mittelpunkt O von $\varDelta\tau$ zwei Kugeln (1) und (2) mit den Radien $l^{\frac{2}{3}}$ und R, wo $R > l^{\frac{2}{3}}$ sein soll.

Nun sollen die $\varDelta\tau'$ in dreierlei Classen eingetheilt werden:

I. in solche, welche nicht ganz ausserhalb der Kugel (1) liegen; sie heissen $\varDelta\tau''$;

II. in solche, welche nicht ganz ausserhalb (2), aber ganz ausserhalb (1) liegen; sie heissen $\Delta\tau'''$;

III. in solche, die ganz ausserhalb (2) liegen; sie heissen $\Delta\tau^N$.

Die $\Delta\tau''$ liegen ganz innerhalb einer um O mit Radius $2l^{\frac{2}{3}}$ beschriebenen Kugel, sobald l unter einer gewissen Grenze angenommen wird. Ihr Beitrag zu $\sum\frac{\Delta\tau'.\varkappa'}{\varrho}$ ist also $< \frac{G}{e}.\frac{4}{3}\left(2l^{\frac{2}{3}}\right)^3$, wenn G grösser ist als alle $\varkappa$, und e der kleinste Werth von ϱ ist. Offenbar ist aber $e = l$. Also ist der Beitrag, den die $\Delta\tau''$ zu $\sum\frac{\Delta\tau'.\varkappa'}{\varrho}$ geben, $<$ *const.* l, wo der Werth der Constante bekannt ist, wenn man die Grenze kennt, unter welcher die Function $\varkappa$ bleibt.

Für die $\Delta\tau'''$ und $\Delta\tau^N$ ist nun $\varrho > l^{\frac{2}{3}}$, also ϱ unendlich gross gegenüber von den Dimensionen der $\Delta\tau$ (welche von der Ordnung l sind), wenn man l unendlich klein werden lässt. Bedeutet also ϱ' den Abstand eines beliebigen Punkts in einem solchen Cubus $\Delta\tau'''$, oder $\Delta\tau^N$, vom Punkt O, so ist

$$\frac{1}{\varrho'} = \frac{1}{\varrho}(1+\delta), \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho'}(1+\delta'),$$

wo die Grössen δ und δ' mit l unendlich klein werden, und zwar kann man durch Festsetzung einer genügend kleinen Grenze für l bewirken, dass δ und δ' einen beliebig vorgeschriebenen Werth nicht übersteigen für alle vorkommenden Fälle (also auch für alle Lagen von $\Delta\tau$ und O). Es ist also

$$\frac{\varkappa'\Delta\tau'''}{\varrho} = \varkappa'\int\limits_{\Delta\tau'''}\frac{d\tau'(1+\delta')}{\varrho'},$$

wo $\varrho' = O \rightarrow d\tau'$, und das Integral über das Gebiet $\Delta\tau'''$ erstreckt ist. Dasselbe gilt von jedem $\Delta\tau^N$.

Bedenkt man nun, dass für kleine l alle $\Delta\tau'''$ in eine mit Radius $2R$ um O beschriebene Kugel fallen, so ersieht man, dass ihr Beitrag zu $\sum\frac{\varkappa'\Delta\tau'}{\varrho}$ kleiner ist als *const.* $\int\frac{d\tau'}{\varrho'}$ erstreckt über die letztgenannte Kugel, d. h. $<$ *const.* R^2.

Man kann also durch Wahl von R und Bestimmung einer

oberen Grenze für l den Beitrag der $\Delta\tau''$ und der $\Delta\tau'''$ zu $\sum \frac{\Delta\tau' \varkappa'}{\varrho}$ beliebig klein machen für alle $\Delta\tau$ und für alle Theilungen der genannten Art mit einem Abstand $< l$.

Hält man nun R fest, so kann eine neue, kleinere obere Grenze für l bestimmt werden, so dass der Beitrag der $\Delta\tau^N$ zu $\sum \frac{\varkappa' \Delta\tau'}{\varrho}$ sich von $\int\limits_{(t)-(2)} \frac{\bar{\varkappa}' d\tau'}{\varrho'}$ um beliebig wenig unterscheidet; $\bar{\varkappa}'$ bedeute hier die Dichte in $d\tau'$, ϱ' den Abstand von $d\tau'$ und O, und die Integration erstrecke sich über das ganze Gebiet ausser der Kugel (2). Wiederum ist hier die Grenze, welche für l festgesetzt werden muss, um eine bestimmte Annäherung zu erreichen, unabhängig von der Lage von $\Delta\tau$.

Um diess zu zeigen, bedenke man, dass $\sum\limits_{\Delta\tau^N} \left([\varkappa'] \int\limits_{\Delta\tau^N} \frac{d\tau'}{\varrho'} \right)$ endlich bleibt; es ist also

$$\sum_{\Delta\tau^N} \frac{\varkappa' \Delta\tau^N}{\varrho} = \sum_{\Delta\tau^N} \varkappa' \int\limits_{\Delta\tau^N} \frac{d\tau' (1+\delta')}{\varrho'} \quad \text{(s. o.)}$$

$$= \sum \varkappa' \int\limits_{\Delta\tau^N} \frac{d\tau'}{\varrho'} + \delta'',$$

wo δ'' wieder eine Grösse der oben bezeichneten Art ist. Ferner ist nun

$$\left[\sum \int\limits_{\Delta\tau^N} \frac{\bar{\varkappa}' d\tau'}{\varrho'} - \sum \varkappa' . \int\limits_{\Delta\tau^N} \frac{d\tau'}{\varrho'} \right] \leq \sum s \int\limits_{\Delta\tau^N} \frac{d\tau'}{\varrho'}$$

$$\leq \frac{\sum s . \Delta\tau^N}{R},$$

wenn s die Schwankung der Function $\varkappa$ im Gebiet $\Delta\tau^N$ bedeutet. Weil R jetzt als fest zu betrachten ist, braucht man nur l so klein zu machen, dass $\sum s \Delta\tau^N$ genügend klein wird,*) und $\sum \int\limits_{\Delta\tau^N} \frac{\bar{\varkappa}' d\tau'}{\varrho'}$ sich von $\int\limits_{(t)-2} \frac{\bar{\varkappa}' d\tau'}{\varrho'}$ um genügend wenig unterscheidet;

---

*) Man braucht also nur die Integrirbarkeit von $\varkappa$ vorauszusetzen.

dadurch kann dann erreicht werden, dass die Differenz

$$\sum \frac{\varkappa' \Delta \tau^N}{\varrho} - \int\limits_{(t)-(2)} \frac{\varkappa' \, d\tau'}{\varrho'}$$

so klein wird, als man will.

Man gelangt nun leicht vollends zu folgendem Schluss: Zu jeder Grösse δ kann eine Grösse σ so gefunden werden, dass bei allen Theilungen, wo $l < \sigma$ ist, für jedes $\Delta\tau$ die ihm zugeordnete Grösse $\sum \frac{\Delta \tau' \varkappa'}{\varrho}$ um weniger als δ verschieden ist vom Werth von V im Mittelpunkt des betreffenden $\Delta\tau$.

Hieraus folgt, dass

$$\lim_{l=0} \sum \frac{\Delta\tau . \Delta\tau' . \varkappa . \varkappa'}{\varrho} = \tfrac{1}{2} \int V \varkappa \, d\tau;$$

der Coefficient $\frac{1}{2}$ erscheint, weil wir uns links jede Combination nur einmal genommen denken, während in der vorhergehenden Betrachtung jede doppelt auftritt.

19.

Das Potential einer im Raum verbreiteten Masse auf sich selbst ist nie negativ; Nachweis dieses Satzes für eine besondere Art von Massenvertheilungen.

Die charakteristische Eigenschaft der Grösse, mit welcher wir uns hier beschäftigen, nie negativ zu sein,*) hängt mit ihrer physikalischen Bedeutung nahe zusammen. **) Ein strenger, mathematischer Beweis dafür folgt aus der Relation:

$$\int V \varkappa \, d\tau = \frac{1}{4\pi} \int d\tau \left\{ \left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2 \right\},$$

welche sich als Folge der Green'schen Sätze in Verbindung mit der Gleichung $\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = -4\pi\varkappa$ ergibt. ***)

---

*) Wir haben ja von Anfang an Massen von beiderlei Zeichen betrachtet.

**) Vergl. Charles Briot, Lehrbuch der mech. Wärmeth., deutsch von H. Weber, Leipzig 1871, pag. 257.

***) Diese Formel findet sich z. B. im Handbuch der theoretischen Physik von Thomson und Tait, deutsch von Helmholtz und Wertheim, Braunschweig 1874, 1. Band, II. Theil, pag. 85, wo als Quelle „Nichol's Cyclopaedia 2d Ed. 1860. Magnetism, Dynamical Relations of" angegeben wird.

Das Integral auf der rechten Seite ist über den ganzen unendlichen Raum auszudehnen.

Die genannte Formel hat eine Bedeutung und ist richtig in jedem Fall, wo $\varkappa$ der von uns im vorigen Artikel geforderten Bedingung genügt. Ihre Ableitung aus den Green'schen Sätzen und der verallgemeinerten Laplace'schen Gleichung macht aber gewisse weitere beschränkende Bedingungen über $\varkappa$ nöthig. Es muss desshalb noch Verschiedenes zum Beweis hinzugefügt werden, um die Allgemeingiltigkeit der Relation sicherzustellen.

Man denke sich zunächst eine Massenvertheilung specieller Art. Es sei eine endliche Anzahl rechtwinkliger Parallelepipeda vorhanden, parallel zu den Coordinatenebenen begrenzt, von denen jedes mit Masse von constanter Dichte erfüllt ist. In verschiedenen Gebieten braucht die Dichte nicht gleich zu sein; im äusseren Raum sei sie überall o. Das von dieser Massenvertheilung herrührende Potential V werde betrachtet. Eines der mit Masse erfüllten Gebiete werde mit $\mathfrak{W}$ bezeichnet. Wir beschreiben in dasselbe ein kleineres Parallelepiped $\mathfrak{W}'$. Für $\mathfrak{W}'$ und seine Begrenzungsflächen und Kanten ist V mit allen Differentialquotienten aller Ordnungen endlich, eindeutig und stetig. Die Gleichung

$$\int_{\mathfrak{W}'} d\tau \left\{ \frac{d^2(V^2)}{dx^2} + \frac{d^2(V^2)}{dy^2} + \frac{d^2(V^2)}{dz^2} \right\} = -2\int dw\, V\frac{dV}{dn}$$

ist also gerechtfertigt. Hier ist das zweite Integral über die Oberfläche von $\mathfrak{W}'$ auszudehnen, und $\frac{dV}{dn}$ ist der Differentialquotient nach der nach Innen gerichteten Normale.

Vermöge der Gleichung

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = -4\pi\varkappa,$$

die für das Gebiet $\mathfrak{W}'$ gilt, erhält man, wenn man die linke Seite entwickelt:

$$-4\pi\int_{\mathfrak{W}'} V\varkappa\, d\tau + \int_{\mathfrak{W}'} d\tau \left\{ \left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2 \right\}$$
$$= -\int dw\, V\frac{dV}{dn}.$$

Indem nun hier die zweiten Differentialquotienten nicht mehr vorkommen, die ersten aber endlich und stetig bleiben auch in den Grenzflächen und Kanten von $\mathfrak{W}$, und $\varkappa$ auch endlich bleibt, so erhält man dieselbe Formel für das Gebiet $\mathfrak{W}$ durch Grenzübergang, indem $\mathfrak{W}'$ sich dem $\mathfrak{W}$ unendlich annähert. Dasselbe gilt für jedes andere, mit Masse erfüllte, parallelepipedische Gebiet. Umgibt man alle Massen noch von einem Würfel W, so ist leicht die Giltigkeit derselben Gleichung für den leeren Theil des Würfels nachzuweisen, und man erhält durch Addition aller Gleichungen für die einzelnen Theile:

$$4\pi\int V\varkappa\, d\tau = \int d\tau\left\{\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right\} + \int dw\, V\frac{dV}{dn},$$

wo nun die Raumintegrale über W zu erstrecken sind, und das Flächenintegral über dessen Oberfläche; die andern Theile heben sich auf. Lässt man nun W unendlich gross werden, so kommt die Formel, die zu erweisen war, indem der Grenzwerth des letzten Glieds null ist.

20.

Verallgemeinerung des Vorigen für andere Massenvertheilungen.

Wenn nun wieder eine Massenvertheilung wie in Art. 18 vorliegt, wobei $\varkappa$ die Dichte in a, b, c bedeutet, so verfahre man folgendermassen: Man denke sich im Raum einen Würfel W festgelegt, welcher alle Punkte umschliesst, in denen $\varkappa$ von Null verschieden ist. Nun theile man W parallel den Begrenzungsflächen in lauter gleiche kleine Würfel und denke man sich eine neue Massenvertheilung, für welche die neue Dichte $\overline{\varkappa}$ in jedem der einzelnen Würfel constant ist, gleich dem Werth von $\varkappa$ in einem beliebigen Punkt des betreffenden Würfels. Das neue Potential sei $\overline{V}$. Die Kante jedes der kleineren Würfel sei l. Dann wird

$$\left[V - \overline{V}\right], \left[\frac{dV}{dx} - \frac{d\overline{V}}{dx}\right], \left[\frac{dV}{dy} - \frac{d\overline{V}}{dy}\right], \left[\frac{dV}{dz} - \frac{d\overline{V}}{dz}\right] \text{ unendlich}$$

klein mit l; und zwar können diese Differenzen für alle Punkte x, y, z und alle Vertheilungen $\overline{\varkappa}$, wo $l < \delta$, unter eine beliebig kleine Grösse herabgemindert werden durch geeignete Bestimmung von δ.

Um diess z. B. für

$$V(x,y,z) - \overline{V}(x,y,z) = \int \frac{\varkappa - \overline{\varkappa}}{r}\, d\tau$$

zu beweisen, braucht man nur um x, y, z eine Kugel (R) mit Radius R herauszuschneiden. $\varkappa$ und $\overline{\varkappa}$ sind unter einer festen Grenze. Durch Wahl von R macht man für alle vorkommenden Fälle den von (R) herrührenden Theil beliebig klein, und dann kann man, indem man R festhält, das Uebrige durch geeignete Bestimmung einer Grenze für l so klein machen, als man will; um zu sehen, dass das letztere möglich ist, braucht man sich nur an das im Art. 18 Entwickelte zu erinnern.

Ebenso kann für $\frac{dV}{dx}$ u. s. f., also auch für $\left(\frac{dV}{dx}\right)^2$ u. s. f. der Beweis geführt werden, indem $\frac{d\overline{V}}{dx}$ u. s. f. unter einer festen Grenze durchweg bleibt.

Man kann nun aus der Giltigkeit der Gleichung

$$4\pi \int \overline{V}\overline{\varkappa}\, d\tau - \int dw\, \overline{V} \frac{d\overline{V}}{dn} - \int d\tau \left\{ \left(\frac{d\overline{V}}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\overline{V}}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\overline{V}}{dz}\right)^2 \right\} = o,$$

erstreckt über W, und daraus, dass

$$4\pi \int V\varkappa\, d\tau - \int dw\, V \frac{dV}{dn} - \int d\tau \left\{ \left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2 \right\}$$

$$- \left(4\pi \int \overline{V}\overline{\varkappa}\, d\tau - \int dw\, \overline{V} \frac{d\overline{V}}{dn} - \int d\tau \left\{ \left(\frac{d\overline{V}}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\overline{V}}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\overline{V}}{dz}\right)^2 \right\} \right)$$

$$= 4\pi \int \Big((V - \overline{V})\varkappa + \overline{V}(\varkappa - \overline{\varkappa}) \Big)\, d\tau + \ldots\ldots$$

mit l unendlich klein wird, schliessen, dass die von der Theilung $\overline{\varkappa}$ und von dem Werth von l unabhängige Grösse

$$4\pi \int V\varkappa\, d\tau - \int dw\, V \frac{dV}{dn} - \int d\tau \left\{ \left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2 \right\} = o$$

ist, erstreckt über den Innenraum, beziehungsweise die Oberfläche des Würfels W. Lässt man nun wieder W unendlich wachsen, so kommt:

$$\int V\varkappa\, d\tau = \frac{1}{4\pi} \int d\tau \left\{ \left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2 \right\}.$$

Diese Formel gilt also für die allgemeinste von uns überhaupt

in Betracht gezogene Massenvertheilung. Das Integral rechts ist absolut convergent und offenbar nie negativ.

21.

Wann wird das Potential einer Masse auf sich selbst null?

Nun ist noch zu untersuchen, wann

$$\int V\varkappa \, d\tau = o$$

ist. Die Schlussformel des letzten Artikels in Verbindung mit der Thatsache, dass die Grössen $\frac{dV}{dx}, \frac{dV}{dy}, \frac{dV}{dz}$ stetige Functionen von x, y, z sind, ergibt

$$\frac{dV}{dx} = \frac{dV}{dy} = \frac{dV}{dz} = o$$

im ganzen Raum. Hieraus folgert man, dass $V(x, y, z)$ im ganzen Raum constant,*) also überall null ist. Wollte man hieraus und aus der Gleichung

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = -4\pi\varkappa$$

beweisen, dass die Dichte verschwindet, so ist daran zu erinnern, dass die verallgemeinerte Laplace'sche Gleichung nicht in jedem Punkt bewiesen ist, wo die Dichte stetig ist; in andern Punkten braucht ohnediess die Dichte offenbar nicht null zu sein.

Wir nehmen nun einen Satz von Gauss**) zu Hilfe:

$$\int \frac{dV}{dn} dw = 4\pi M;$$

wir denken uns der Einfachheit halber das Integral über die Oberfläche eines rechtwinkligen Parallelepipeds erstreckt; $\frac{dV}{dn}$ ist die Ableitung nach der in's Innere gerichteten Normale, und M

---

*) Bew. mit Hilfe des entsprechenden, für eine Function einer Veränderlichen geltenden Satzes. Vergl. den Bew. von Ossian Bonnet für den Fundamentalsatz der Differentialrechnung im »Cours de calcul différentiel et intégral, par J. A. Serret, Paris 1868“ I. Bd. pag. 17—19, sowie die daraus gezogene Folgerung pag. 20.

**) Vergl. Allgemeine Lehrsätze u. s. f., Art. 23.

die algebraische Summe der im Parallelepiped enthaltenen Massen. Zum Beweis verbinde man die Gleichungen

$$\int \left\{ \frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} \right\} d\tau = -\int \frac{dV}{dn} dw$$

und

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} = -4\pi\varkappa$$

mit einander.*) Die Giltigkeit des Resultats für den Fall, dass von $\varkappa$ nur die Integrirbarkeit vorausgesetzt wird — im gewöhnlichen Sinn —, kann durch den gleichen Kunstgriff bewiesen werden, den wir im Vorhergehenden angewandt haben. Indem nun $\frac{dV}{dn}$ überall null ist, folgt aus der Gauss'schen Formel:

$$M = o.$$

Also ist auch die algebraische Summe der Massen in jedem Gebiet null, wie man leicht durch Zusammensetzung des Gebiets aus unendlich vielen unendlich kleinen, parallelepipedischen Theilen erkennen kann.

Umgekehrt: wenn $\varkappa$ der letzten Bedingung noch zu der früheren hin genügt, so ist das Potential überall null. Grenzt man nämlich um x, y, z eine Kugel ab, so kann man diese so klein machen, dass der Beitrag, den diese Kugel zu $V(x, y, z)$ gibt, so klein wird, als man nur will; von dem übrigen Theil von $V(x, y, z)$, der erhalten wird durch Integration über das Gebiet ausserhalb der Kugel, kann durch eine Betrachtung, analog der in Art. 14 bei III angewandten, gezeigt werden, dass er null ist. Also ist überall

$$V = o,$$

und somit auch

$$\tfrac{1}{2}\int V\varkappa\, d\tau = \overline{\iint \frac{\varkappa\varkappa'\, d\tau\, d\tau'}{\varrho}} = o.$$

Wenn man also vornweg von $\varkappa$ voraussetzt, dass es eine Integration in der gewöhnlichen Weise zulasse, so ist noth-

*) Vergl. Briot, Mech. Wärmetheorie, pag. 230.

wendig und hinreichend für das Verschwinden des Potentials der Masse auf sich selbst, dass

$$\int \varkappa \, d\tau = o$$

ist für jedes Gebiet. Es ist dann

$$\varkappa = o$$

in jedem Punkt, wo $\varkappa$ als Function von a, b, c stetig ist.

22.

Ein neuer Integralsatz.

Dass $\int \varkappa \, d\tau = o$ für jedes Gebiet, wenn $\int V\varkappa \, d\tau = o$, kann auch mit Hilfe einer andern, neuen Formel gezeigt werden. Diese Formel, sowie ihre Herleitung, dürfte vielleicht nicht ohne einiges Interesse sein, wesshalb wir sie im Folgenden entwickeln.

Wir denken uns wieder den ganzen Raum durch drei Ebenensysteme parallel den Coordinatenebenen in lauter gleiche Würfel $\Delta\tau$ mit der Kante l getheilt. Ueber $\varkappa$ machen wir dieselben Voraussetzungen wie vorher.

Um den Mittelpunkt eines solchen (möglicherweise keine Massen enthaltenden) Würfels $\Delta\tau$ beschreibe man eine Kugel K mit Radius R, wo R vorderhand als constante Grösse zu betrachten ist. Nun definire man eine Grösse $M_{\Delta\tau}$ folgendermassen: Mit $\Delta\tau'$ sollen diejenigen Würfel bezeichnet werden, deren Mittelpunkte im Innern von K liegen; nun setze man

$$M_{\Delta\tau} = \sum \frac{\Delta\tau'' \, \Delta\tau''' \, \varkappa'' \, \varkappa'''}{\varrho},$$

wo $\varkappa''$, beziehungsweise $\varkappa'''$, den Werth der Dichte in irgend welchem Punkt von $\Delta\tau''$, beziehungsweise $\Delta\tau'''$, und ϱ den Abstand der Mittelpunkte von $\Delta\tau''$ und $\Delta\tau'''$ bedeutet. Die Summation erstreckt sich über alle Combinationen von zwei von einander verschiedenen, aus den $\Delta\tau'$ herausgehobenen $\Delta\tau''$ und $\Delta\tau'''$, wobei jede Combination einmal zu rechnen ist; $\Delta\tau$ selbst gehört auch zu den $\Delta\tau'$.

Bildet man nun

$$\sum_{(\Delta\tau)} \Delta\tau \, . \, M_{\Delta\tau}$$

über alle $\Delta\tau$, wofür $M_{\Delta\tau}$ nicht null ist, so folgt aus analogen Betrachtungen wie im Art. 18, dass

$$\lim_{l=o} \sum \Delta\tau\, M_{\Delta\tau} = \int d\tau\, P,$$

wofern man unter P das Potential derjenigen Masse auf sich selbst versteht, welche in der mit Radius R um $d\tau$ beschriebenen Kugel enthalten ist. Dabei ist über ein Gebiet zu integriren, welches alle Punkte umfasst, für die das zugehörige P von Null verschieden ist.

Der genannte Grenzwerth lässt sich aber noch anders ausdrücken. Die $\Delta\tau$ sind inhaltlich alle einander gleich:

$$\Delta\tau = l^3;$$

man erhält also:

$$\sum \Delta\tau\, M_{\Delta\tau} = l^3 \sum_{(\Delta\tau)} \sum \frac{\Delta\tau'' . \Delta\tau''' . \varkappa'' . \varkappa'''}{\varrho}$$

$$= l^3 \sum n \frac{\varkappa . \varkappa^0 . \Delta\tau . \Delta\tau^0}{\varrho},$$

wenn die letzte Summe erstreckt wird über alle Combinationen zweier Gebietstheile $\Delta\tau$ und $\Delta\tau^0$, und n angibt, wie oft die betreffende Combination in der vorhergehenden Summe auftritt. n ist also die Anzahl der Würfel, deren Mittelpunkte sowohl von dem Mittelpunkt von $\Delta\tau$, als auch von dem von $\Delta\tau^0$ um weniger als R abstehen. Bedeutet also F den Inhalt des Raums, welcher den beiden um die Mittelpunkte von $\Delta\tau$ und $\Delta\tau^0$ mit Radius R beschriebenen Kugeln gemein ist, so ist

$$\lim_{l=o} (n l^3) = F;$$

und zwar kann durch Festsetzung einer Grenze für l die Differenz $F - l^3 n$ für alle Combinationen $\Delta\tau$, $\Delta\tau^0$ zugleich beliebig klein gemacht werden. Bedenkt man ferner, dass $\sum \frac{[\varkappa]\,[\varkappa^0]\, \Delta\tau\, \Delta\tau^0}{\varrho}$ unter einer endlichen Grenze bleibt, so erkennt man, dass

$$\int P\, d\tau = \lim_{l=o} \sum \left\{ \frac{\varkappa . \varkappa^0 . \Delta\tau\, \Delta\tau^0}{\varrho} F \right\},$$

oder, was dasselbe ist,

$$= \overline{\iint \frac{\varkappa . \varkappa'}{\varrho} F\, d\tau\, d\tau'},$$

wenn wir auf die frühere Bezeichnung zurückgreifen. Der Bereich der Integration ist das mit Masse erfüllte Gebiet; alles Andere fällt ja weg.

F besteht nun aus zwei Kugelabschnitten von der Höhe

$$h = R - \frac{\varrho}{2}.$$

Man hat daher

$$F = 2\pi\left(R - \frac{h}{3}\right)h^2$$
$$= \frac{4\pi}{3}\left(R - \frac{\varrho}{2}\right)^2\left(R + \frac{\varrho}{4}\right),$$

so lange als $\quad R \geqq \frac{\varrho}{2}.$

Wir nehmen hier $2R$ grösser an als alle ϱ, die vorkommen; dann erhält man also:

$$\int d\tau\, P = \frac{4\pi}{3}\overline{\int\int \frac{\left(R - \frac{\varrho}{2}\right)^2\left(R + \frac{\varrho}{4}\right)}{\varrho}}\, \varkappa\, \varkappa'\, d\tau\, d\tau',$$

wo das rechte Integral so zu verstehen ist, wie früher angegeben wurde.

Was wird nun aus dieser Gleichung, wenn wir R unendlich wachsen lassen? Wir dividiren zuvor mit R^2. Die rechte Seite der Gleichung wird dann zu

$$\frac{4\pi}{3}R\overline{\int\int}\frac{\varkappa\,\varkappa'\, d\tau\, d\tau'}{\varrho} - \pi\overline{\int\int}\varkappa\,\varkappa'\, d\tau\, d\tau',$$

abgesehen von Grössen, die mit $\frac{1}{R}$ unendlich klein werden.

Nun werde eine feste Kugel (1) mit Radius $\mathfrak{R}$ und Mittelpunkt $\mathfrak{A}$ so angenommen, dass alle Massen in ihr liegen. Ferner sollen um $\mathfrak{A}$ noch zwei veränderliche Kugeln (2) und (3) beschrieben werden mit den Radien $R - \mathfrak{R}$ und $R + \mathfrak{R}$. Die Theile ausserhalb (3) geben zu $\int P\, d\tau$ den Beitrag Null. Für jedes Element $d\tau$ innerhalb von (2) ist P gleich dem Potential der gesammten Masse auf sich selbst. Diese Theile geben also zu $\frac{1}{R^2}\int P\, d\tau$ den Beitrag

$$\frac{4\pi}{3}\frac{(R-\mathfrak{R})^3}{R^2}\overline{\iint}\frac{\varkappa\,\varkappa'\,d\tau\,d\tau'}{\varrho}=\left(\frac{4\pi}{3}R-4\pi\mathfrak{R}\right)\overline{\iint}\frac{\varkappa\,\varkappa'\,d\tau\,d\tau'}{\varrho},$$

abgesehen von Grössen, die mit $\frac{1}{R}$ verschwinden.

Es ist also nur noch der Theil von $\frac{1}{R^2}\int P\,d\tau$ zu bestimmen, der herrührt von dem schalenförmigen Raum zwischen den Kugeloberflächen (2) und (3). Es sei $d\tau$ ein Element dieses Gebiets; $R+t$ sei sein Abstand von $\mathfrak{A}$, so dass also t von $-\mathfrak{R}$ bis $+\mathfrak{R}$ geht. Wenn nun $d\sigma$ das Element der um $\mathfrak{A}$ mit Radius 1 beschriebenen Kugeloberfläche in dem Punkt bedeutet, wo $\mathfrak{A}\longrightarrow d\tau$ diese Oberfläche schneidet, so kann das Raumelement $d\tau$ auf die Form $(R+t)^2\,d\sigma\,dt$ gebracht werden. Man erhält also

$$\iint\left(1+\frac{t}{R}\right)^2 P\,d\sigma\,dt\text{*)}$$

für den gesuchten Beitrag.

Nun bedeute α eine durch $\mathfrak{A}$ senkrecht zur Geraden $\mathfrak{A}\longrightarrow d\tau$ gelegte Ebene, als deren positive Seite wir die dem $d\tau$ zugekehrte betrachten wollen. Ferner sei β eine Ebene parallel zu α, im Abstand t von α — mit Rücksicht auf das Zeichen —; die positive Seite von β werde gerade so bestimmt. Wenn nun S das Potential der auf der positiven Seite von β gelegenen Masse auf sich selbst bedeutet, so wird $P-S$ mit $\frac{1}{R}$ unendlich klein, und zwar in der Weise, dass

$$\iint\left(1+\frac{t}{R}\right)^2 P\,d\sigma\,dt=\iint S\,d\sigma\,dt+\delta$$

gesetzt werden darf, wo δ mit $\frac{1}{R}$ verschwindet.

Im Ganzen erhält man also:

$$\frac{4\pi}{3}R\overline{\iint}\frac{\varkappa\,\varkappa'\,d\tau\,d\tau'}{\varrho}-\pi\overline{\iint}\varkappa\,\varkappa'\,d\tau\,d\tau'$$

$$=\left(\frac{4\pi}{3}R-4\pi\mathfrak{R}\right)\overline{\iint}\frac{\varkappa\,\varkappa'\,d\tau\,d\tau'}{\varrho}+\iint S\,d\sigma\,dt+\delta',$$

---

*) Dieses Integral ist ein gewöhnliches. Wir können es ermitteln, indem wir zuerst über die Kugel und dann nach t integriren, oder umgekehrt.

wo δ' mit $\frac{1}{R}$ unendlich klein wird. Nachdem man die gleichen Theile weggehoben, erhält man an der Grenze:

$$\overline{\iint} x\,x'\,d\tau\,d\tau' = 4\mathfrak{R}\,\overline{\iint}\frac{x\,x'\,d\tau\,d\tau'}{\varrho} - \frac{1}{\pi}\iint S\,d\sigma\,dt.$$

Wir denken uns also um einen Punkt $\mathfrak{A}$ zwei Kugeln mit Radius $\mathfrak{R}$ und mit Radius 1 beschrieben. Die erste Kugel enthalte alle Massen. Das Element der zweiten Kugel sei $d\sigma$. Ferner sei β eine Ebene parallel der Tangentialebene in $d\sigma$ im Abstand t von $\mathfrak{A}$ auf derselben Seite von $\mathfrak{A}$ wie $d\sigma$ oder auf der entgegengesetzten, je nachdem $t \gtrless o$. S sei das Potential derjenigen Masse auf sich selbst, die auf der Seite von β gelegen ist, auf welche man kommt beim Fortschreiten von β aus in der Richtung $\mathfrak{A} \longrightarrow d\sigma$. Dann ist S eine Function von t und von der Lage von $d\sigma$. t lässt man von $-\mathfrak{R}$ bis $+\mathfrak{R}$ gehen. Dann gilt:

$$\overline{\iint} x\,x'\,d\tau\,d\tau' = 4\,\mathfrak{R}\,\overline{\iint}\frac{x\,x'\,d\tau\,d\tau'}{\varrho} - \frac{1}{\pi}\int_{-\mathfrak{R}}^{+\mathfrak{R}} dt \int d\sigma\,S,$$

wo die beiden ersten Integrale in der früher angegebenen Weise zu verstehen sind.

23.

Herleitung der früher für die Dichte gefundenen Bedingung aus der zuletzt gegebenen Formel.

Aus der letzten Formel ist die Bedingung für das Verschwinden des Potentials der gesammten Masse auf sich selbst leicht herzuleiten, wenn man weiss, dass diese Grösse nie negativ ist.

Mit

$$\overline{\iint}\frac{x\,x'\,d\tau\,d\tau'}{\varrho} = o$$

erhält man

$$\overline{\iint} x\,x'\,d\tau\,d\tau' = -\frac{1}{\pi}\int_{-\mathfrak{R}}^{+\mathfrak{R}} dt \int d\sigma\,S.$$

Links steht eine Grösse, welche gleich der Hälfte des Quadrats der algebraischen Summe aller Massen, also nie negativ ist. S

ist nie negativ; die rechte Seite ist also nie positiv. Somit ist

$$\overline{\iint \varkappa\, \varkappa'\, d\tau\, d\tau'} = \int_{-\mathfrak{R}}^{+\mathfrak{R}} dt \int d\sigma\, S = o.$$

S ändert sich in der Weise stetig, dass diese Gleichung nur erfüllt sein kann, wenn jeder einzelne Werth von S null ist. Also: wenn man durch die Massen eine beliebige Ebene legt, so ist für jede Seite dieser Ebene das Potential der Masse auf sich selbst null. Auf beide Hälften, in welche wir die gesammte Masse zerschnitten haben, kann dieselbe Betrachtung angewendet werden, wodurch man findet, dass für jedes herausgeschnittene Parallelepiped das Potential der in ihm enthaltenen Masse auf sich selbst verschwindet. Es ist also auch vermöge der letzten Gleichung die algebraische Summe der in einem beliebigen Parallelepiped enthaltenen Massen der Null gleich, woraus dieselben Schlüsse wie früher gezogen werden können.

Anhang.

Ueber das totale Differential.

24.

Das totale Differential in einem Punkt.

Die im Folgenden für eine Function zweier Veränderlichen entwickelten Sätze lassen sich ohne Weiteres für eine beliebige Anzahl von reellen Veränderlichen verallgemeinern. Wir suchen die Zunahme der Function $\varphi(x, y)$ in unendlicher Nähe des festen Punkts x_1, y_1 darzustellen; φ sei also in einer gewissen Umgebung von x_1, y_1 definirt. Wofern nun die Function φ bei einer gewissen Kleinheit von v in jedem Punkt $x_1, y_1 + v$ einen partiellen Differentialquotienten φ_1 nach x besitzt, ist

I. $\varphi(x_1 + u, y_1 + v) - \varphi(x_1, y_1 + v) = u\,\varphi_1(x_1, y_1 + v) + u \,.\, e_{u,v}$,

wo $e_{u,v}$ eine Grösse bedeutet, welche *bei festgehaltenem* v mit verschwindendem u die Null zur Grenze hat,

$$\lim_{u=o} e_{u,v} = o.$$

Wenn ferner $\varphi_1(x_1, y)$ eine im Punkt y_1 stetige Function von y ist, so gilt:

$$\text{II.} \quad \varphi_1(x_1, y_1 + v) - \varphi_1(x_1, y_1) = \overline{e}_v, \qquad \lim_{v=o} \overline{e}_v = o.$$

Existirt ausserdem noch ein partieller Differentialquotient φ_2 von φ nach y im Punkt x_1, y_1, so hat man:

$$\text{III.} \quad \varphi(x_1, y_1 + v) - \varphi(x_1, y_1) = v\,\varphi_2(x_1, y_1) + v\,\overline{\overline{e}}_v, \qquad \lim_{v=o} \overline{\overline{e}}_v = o.$$

Die Gleichungen I., II. und III. geben zusammen:

$$\varphi(x_1+u, y_1+v) - \varphi(x_1, y_1) = u\,\varphi_1(x_1, y_1) + v\,\varphi_2(x_1, y_1) + u\,e_{u,v} + u\,\bar{e}_v + v\,\bar{\bar{e}}_v.$$

Weil nun hierin $e_{u,v}$ eine Grösse bedeutet, die bei *festgehaltenem* v mit u verschwindet, so kann hieraus kein Schluss gezogen werden für den Fall, wo u und v *gleichzeitig* verschwinden.

Wir führen desshalb noch weitere Voraussetzungen ein:

In jedem Punkt x, y einer gewissen Umgebung von x_1, y_1 sei ein partieller Differentialquotient nach x vorhanden im gewöhnlichen Sinn, so dass also

$$\lim_{\delta = o} \frac{\varphi(x+\delta, y) - \varphi(x, y)}{\delta} = \varphi_1(x, y),$$

bei festgehaltenem x und y, für positive und negative δ.

Ferner sei $\varphi_1(x, y)$ im Punkt x_1, y_1 als Function von x, y stetig, so dass also eine gewisse Grenze festgesetzt werden kann, derart, dass $[\varphi_1(x_1+h, y_1+k) - \varphi_1(x_1, y_1)]$ für alle h und k unter dieser Grenze kleiner ist als ein beliebig vorher gewählter Werth.

Unter diesen Voraussetzungen kann gezeigt werden, dass $e_{u,v}$ unendlich klein wird, wenn u und v unendlich klein werden, gleichgiltig, wie dabei die letzteren beiden Grössen sich gegenseitig verhalten.

Man hat nach dem Fundamentalsatz der Differentialrechnung: *)

$$\varphi(x_1+u, y_1+v) - \varphi(x_1, y_1+v) = u\,\varphi_1(x_1+\Theta u, y_1+v),$$

wo

$$o < \Theta < +1.$$

Da nun φ_1 in x_1, y_1 als Function von x, y stetig ist, so lässt sich zu jeder beliebig vorher gewählten Grösse δ ein Werth σ so bestimmen, dass für alle $[v] < \sigma$ und $[u] < \sigma$ die Differenz

$$[u\,\varphi_1(x_1+\Theta u, y_1+v) - u\,\varphi_1(x_1, y_1)] < [u]\,\delta$$

ist; d. h.

$$\varphi(x_1+u, y_1+v) - \varphi(x_1, y_1+v) = u\,\varphi_1(x_1, y_1) + u\,\bar{e}_{u,v},$$

$$[\bar{e}_{u,v}] < \delta.$$

*) Vergl. in Serret, calcul différentiel et intégral, I. Bd., den von Ossian Bonnet herrührenden, schon einmal citirten Beweis, welcher vom Differentialquotienten nur voraussetzt, dass er in jedem Zwischenpunkt existire.

Diess verbunden mit III. und mit den Ungleichungen

$$\frac{[u]}{\varrho} \leqq 1, \frac{[v]}{\varrho} \leqq 1,$$

wo

$$\varrho = \sqrt{u^2 + v^2},$$

gibt

$$\varphi(x_1 + u, y_1 + v) - \varphi(x_1, y_1) = u \varphi_1(x_1, y_1) + v \varphi_2(x_1, y_1) + \varrho e'_{u,v}.$$

Hier ist nun

$$\lim_{\varrho = o} e'_{u,v} = o,$$

wie auch sonst u und v sich zu einander verhalten mögen.

Für diesen Satz ist also folgendes System von Bedingungen hinreichend:

1) $\varphi(x, y)$ hat in jedem Punkt x, y einer gewissen Umgebung von x_1, y_1 einen partiellen Differentialquotienten $\varphi_1(x, y)$ nach x.
2) $\varphi_1(x, y)$ ist im Punkt x_1, y_1 als Function von x, y stetig.
3) $\varphi(x, y)$ hat im Punkt x_1, y_1 einen partiellen Differentialquotienten $\varphi_2(x_1, y_1)$ nach y.

Diese Bedingungen sind unsymmetrisch*) und können also auch umgekehrt mit vertauschtem x und y ausgesprochen werden, indem der Satz in Beziehung auf x und y symmetrisch ist.

Wir machen jetzt ausserdem noch eine neue Voraussetzung über φ_1 und φ_2:

Die Function $\varphi(x_1, y)$ von y soll in einer gewissen Nähe von $y = y_1$ in jedem Punkt einen Differentialquotienten $\varphi_2(x_1, y)$ besitzen. Ferner sollen zwei positive feste Grössen A und μ existiren, so dass

$$[\varphi_2(x_1, y_1 + v) - \varphi_2(x_1, y_1)] < A[v]^{\mu},$$

und

$$[\varphi_1(x_1 + u, y_1 + v) - \varphi_1(x_1, y_1)] < A\varrho^{\mu},$$

wo die erste Gleichung für alle v, die zweite für alle u, v unter einer gewissen Grenze gelten soll.

Dann findet man auf dieselbe Weise wie oben:

$$[\varphi(x_1 + u, y_1 + v) - \varphi(x_1, y_1 + v) - u\varphi_1(x_1, y_1)] < A\varrho^{1+\mu},$$

und

---

*) Vergl. auch P. du Bois-Reymond, Allg. Functionenth.; pag. 136, Note.

$$[\varphi(x_1, y_1 + v) - \varphi(x_1, y_1) - v\,\varphi_2(x_1, y_1)] < A\,[v]^{1+\mu},$$

woraus sich ergibt

$$[\varphi(x_1 + u, y_1 + v) - \varphi(x_1, y_1) - u\varphi_1(x_1, y_1) - v\varphi_2(x_1, y_1)] < 2A\varrho^{1+\mu}.$$

25.

Das totale Differential in einem Gebiet.

Wir denken uns zwei Gebiete gegeben, das der Punkte $\mathfrak{F}$ und das der $\mathfrak{L}$, die $\mathfrak{F}$ (mit Einschluss der Grenzpunkte) alle im Innern des Gebiets $\mathfrak{L}$ gelegen. In jedem Punkt $\mathfrak{L}$ soll φ definirt sein, sollen die partiellen Differentialquotienten erster Ordnung existiren und stetig sein als Functionen von x, y. Dann kann zu jeder Grösse δ ein Werth σ gefunden werden, so beschaffen, dass

$$[\varphi(x + u, y + v) - \varphi(x, y) - u\,\varphi_1(x, y) - v\,\varphi_2(x, y)] < \varrho\,\delta$$

ist für alle x, y im Gebiet $\mathfrak{F}$ und alle u, v, wofür

$$\varrho = \sqrt{u^2 + v^2} < \sigma.$$

Bew.: Wir construiren (s. Art. 8) einen Bereich $\mathfrak{H}$, der den Bereich $\mathfrak{F}$ ganz enthält und im Bereich $\mathfrak{L}$ ganz enthalten ist. Zunächst kann nun für ϱ eine Grenze so gewählt werden, dass für alle x, y, die im Gebiet $\mathfrak{F}$ liegen, $x + u$, $y + v$ sicher in's Gebiet $\mathfrak{H}$ fällt. Zugleich aber kann man σ so klein wählen, dass

$$[\varphi_1(x + u, y + v) - \varphi_1(x, y)] < \frac{\delta}{2},$$

$$[\varphi_2(x + u, y + v) - \varphi_2(x, y)] < \frac{\delta}{2},$$

wenn x, y im Gebiet $\mathfrak{F}$ liegt, und

$$\varrho = \sqrt{u^2 + v^2} < \sigma;$$

denn φ_1 und φ_2 sind im Gebiet $\mathfrak{H}$ auch gleichmässig stetig. Da nun auch die geraden Linien von $x, y + v$ nach $x + u$, $y + v$ und von x, y nach $x, y + v$ ganz in den Bereich $\mathfrak{H}$ fallen, so dürfen wir von den Gleichungen

$$\varphi(x + u, y + v) - \varphi(x, y + v) = u\,\varphi_1(x + \Theta u, y + v),$$

$$\varphi(x, y + v) - \varphi(x, y) = v\,\varphi_2(x, y + \Theta' v),$$

wo

$$o < \Theta < 1, \quad o < \Theta' < 1, \quad \text{(s. o.)}$$

Gebrauch machen. Nun kann gefolgert werden, dass

$$[\varphi(x+u, y+v) - \varphi(x, y+v) - u\,\varphi_1(x,y)] < [u]\frac{\delta}{2},$$

$$[\varphi(x, y+v) - \varphi(x,y) - v\,\varphi_2(x,y)] < [v]\frac{\delta}{2},$$

und somit

$$[\varphi(x+u, y+v) - \varphi(x,y) - u\,\varphi_1(x,y) - v\,\varphi_2(x,y)] < \varrho\,\delta.$$

Nachträgliche Bemerkung.

Das auf S. 9 über den Riemann'schen Beweis für die Gleichung $\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}=-4\pi\varkappa$ Gesagte wird durch Folgendes berichtigt und ergänzt. Der Bew. bei Riemann (S. 44) setzt die Existenz der Grössen $\frac{d^2V}{dx^2}$ u. s. f. schon als bewiesen voraus und beruht auf der Gauss'schen Gleichung $\int\frac{dV}{dn}\,dw = 4\pi M$. Der genannte Beweis kann unter Zuhilfenahme des Fundamentalsatzes der Differentialrechnung durch einige Ergänzungen vollkommen strenge gemacht werden. Man kommt dann zu diesem Resultat: Wenn $\varkappa$ der Bedingung des Art. 2 genügt, wenn die Grössen $\frac{d^2V}{dx^2}, \frac{d^2V}{dy^2}, \frac{d^2V}{dz^2}$ existiren in jedem Punkt eines gewissen Gebiets um den bestimmten Punkt (x) herum, wenn ferner $\frac{d^2V}{dx^2}, \frac{d^2V}{dy^2}, \frac{d^2V}{dz^2}$ und $\varkappa$ in (x) stetig sind als Functionen von x, y, z, so ist die verallgemeinerte Laplace'sche Gleichung im Punkt (x) erfüllt.